

# FÍSICA I

Profesora: **MARÍA ENCARNACIÓN CÁMARA**  
(ecamara @etsii.upm.es)

## 14 temas

- Magnitudes físicas. Unidades y medidas (5 hojas)
- Vectores y sistemas de vectores (9)
- Estática de sistemas (5)
- Cinemática del punto (5)
- Cinemática de los sistemas (4)
- Cinemática relativa del punto (2)
- Dinámica del punto (4)
- Trabajo y energía I (3)
- Trabajo y energía II (3)
- Movimiento de un punto bajo fuerzas centrales (4)
- Dinámica de los sistemas I (3)
- Dinámica de los sistemas II (4)
- Medios deformables I (2)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Laura Martín de

2002

# FÍSICA I

Profesora: MARÍA ENCARNACIÓN CÁMARA  
(camara@csll.upm.es)

14 temas

- 1. Propiedades físicas de la materia (1h)
- 2. Vectores y sistemas de referencia (2h)
- 3. Cinemática del punto (2h)
- 4. Cinemática del cuerpo rígido (2h)
- 5. Dinámica del punto (2h)
- 6. Dinámica del cuerpo rígido (2h)
- 7. Trabajo y energía (2h)
- 8. Momento de la fuerza y conservación del momento angular (2h)
- 9. Mecánica de los fluidos (2h)
- 10. Mecánica de los sólidos (2h)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# T1 - MAGNITUDES FÍSICAS . UNIDADES Y MEDIDAS

## 1. Introducción a la Ciencia Física .

Física significa en griego "naturaleza"

Hasta s.XIX → Fenómenos naturales

Desde s.XIX → Fenómenos físicos

OBJETIVO → se consigue a partir de la teoría (ciencia formal) y de la observación (ciencia de la experimentación).

Prende el estudio de los componentes de la materia y sus interacciones mutuas y, a partir de ello, explicar las propiedades, la materia y los fenómenos que observa en la naturaleza.

La validez de las teorías científicas no es de por vida; es válida hasta que se demuestre lo contrario. (Aristóteles → Galileo)

Para que una hipótesis sea científica, debe ser probada.

### • Metodología científica

Observación de un fenómeno natural



Diseño y realización del experimento



MODELO, que dará lugar a una TEORÍA



Comprobación



Predicción

- Registro de la info
- Análisis de la misma
- Identificación de variables
- Formulación de hipótesis

Modelo → ayuda a comprender una determinada cosa (uz - ondas en el agua)

Teoría → cuestión que intenta resolver el conjunto de cosas que en - contramos a nuestro alrededor

Ley → enunciación de la teoría y su validez es comprobada por los experimentos.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

y ondulatoria)

Optica → uz

F. cuántica (1924, De Broglie .

## Principio de Correspondencia (Bohr, 1923)

El principio postula una correspondencia (relación) entre la teoría clásica y cuántica -en el sentido de alguna condición límite. Gracias a esto, se pueden realizar conexiones entre las frecuencias, intensidades y polarización de las líneas espectrales de la teoría cuántica, y las correspondientes cantidades de la teoría clásica.

## 2. Magnitudes, cantidades y unidades

$q_0, q_1, q_2, \dots$  → conjunto de observables comparables dos a dos

↓  
Cantidades de una misma magnitud.

↓  
concreto,  
observable

↓  
abstracto

Extensivas (masa, volumen,  
longitud, tiempo)  
Intensivas (temperatura,  
no aditivas densidad)

Unidad de una magnitud → cantidad  $q_0$  de una magnitud que se toma de referencia

Medir una cantidad es compararla con otra que se toma como unidad

$q_0$ : unidad de la magnitud  $M$

$q_i$ : cantidad

$M(q_i)$ : medida sobre  $q_0$

$$\left. \begin{array}{l} q_0: \text{unidad de la magnitud } M \\ q_i: \text{cantidad} \\ M(q_i): \text{medida sobre } q_0 \end{array} \right\} \frac{q_i}{q_0} = M(q_i) \rightarrow q_i = q_0 \cdot M(q_i)$$

### MAGNITUDES

- Primarias → se definen de forma cualitativa antes de establecer unidades y medidas (long., masa, fuerza)
- Secundarias → a partir de las primarias (velocidad, aceleración)

Si hablamos de los sistemas de unidades:

- Básicas o fundamentales → se eligen arbitrariamente para formar la base de un sistema dimensional.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• El sistema Internacional (SI)

Magnitudes fundamentales y unidades básicas

- Longitud → metro
- Masa → kilogramo
- Tiempo → segundo
- Temperatura termodinámica → Kelvin
- Intensidad de corriente → amperio
- Intensidad luminosa → candela
- Cantidad de materia → mol

Unidades derivadas → unidad de superficie, velocidad, aceleración, ...  
 Unidades suplementarias → unidad de ángulo plano (radián) y de (Tras 1997 son derivadas) ángulo sólido (estereorradián).

Múltiplos y submúltiplos de las unidades

Múltiplos			Submúltiplos		
deca	da	$10^1$	deci	d	$10^{-1}$
hecto	h	$10^2$	centi	c	$10^{-2}$
kilo	k	$10^3$	mili	m	$10^{-3}$
mega	M	$10^6$	micro	$\mu$	$10^{-6}$
giga	G	$10^9$	nano	n	$10^{-9}$
tera	T	$10^{12}$	pico	p	$10^{-12}$
peta	P	$10^{15}$	femto	f	$10^{-15}$
exa	E	$10^{18}$	atto	a	$10^{-18}$
zetta	Z	$10^{21}$	zepto	z	$10^{-21}$
yotta	Y	$10^{24}$	yocto	y	$10^{-24}$

• Notación científica y órdenes de magnitud

Se utiliza para escribir valores muy grandes o muy pequeños.

Ej: N° de Avogadro :  $6,023 \cdot 10^{23}$   
 Mantisa      potencia de 10

El orden de magnitud es la potencia de 10 más cercana al número



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

### 3. Leyes Físicas y constantes universales

En una ley física intervienen magnitudes primarias, al menos una, y pueden intervenir también magnitudes secundarias, pero la forma de una ley física siempre se puede reducir a una expresión monómica (productos y potencias).

$$q \propto q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \dots q_n^{\alpha_n} \quad \begin{cases} q_i = \text{cantidades} \\ \alpha_i = n^{\text{os}} \text{ fijos (grado de coherencia o dependencia)} \end{cases}$$

proporcional

$$y = C x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \begin{cases} y = M(q) \rightarrow \text{medida de } q \\ C = \text{constante} \\ x_i = M(q_i) \end{cases}$$

La constante  $C$  depende de las unidades utilizadas y se puede considerar como una magnitud secundaria. Existen dos tipos de constantes:

- constante característica: depende de la naturaleza del cuerpo o material.

Ej. Módulo de Young (Ley de Hooke)

$$F \propto \frac{\Delta L}{L} \rightarrow F = E \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow E = \frac{FL}{\Delta L}$$

- constante universal: independiente de la naturaleza de la sustancia

• Ineludibles  $\rightarrow$   $c_k$  de gravitación, velocidad de la luz en el vacío,  $c_k$  de Planck,  $c_k$  de Boltzmann,  $u^{\circ}$  de Avogadro, permitividad eléctrica en el vacío.

• Superfluas  $\rightarrow$  pueden ignorarse adoptando unidades adecuadas.

### 4. Ecuaciones de dimensión: homogeneidad dimensional.

$$\text{Ley física} \rightarrow M(q) = C [M(q_1)]^{\alpha_1} [M(q_2)]^{\alpha_2} \dots [M(q_n)]^{\alpha_n}$$

$$\left[ \begin{aligned} M(q) = \frac{q}{q_0} &= C \left( \frac{q_1}{q_{01}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{q_2}{q_{02}} \right)^{\alpha_2} \dots \left( \frac{q_n}{q_{0n}} \right)^{\alpha_n} \\ \frac{q}{q_0^*} &= C^* \left( \frac{q_1}{q_{01}^*} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{q_2}{q_{02}^*} \right)^{\alpha_2} \dots \left( \frac{q_n}{q_{0n}^*} \right)^{\alpha_n} \end{aligned} \right.$$

**Cartagena99**

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Aceleración a  $[a] = \frac{[v]}{[t]} = L \cdot T^{-2}$  básicas de un sistema)

Cuando una ley física se va a cumplir el principio de homogeneidad, es decir, que las magnitudes son homogéneas entre sí, que tienen la misma dimensión.

Ejercicios.

1. Bernoulli:  $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{cte.}$

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[\frac{1}{2} \rho v^2] \rightarrow [\rho] \cdot [v]^2 = \frac{M}{L^3} \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^2 = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

$$[\rho gh] = (ML^{-3}) \cdot (LT^{-2}) \cdot L = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

La ecuación de Bernoulli es correcta dimensionalmente.

2. Deducir, mediante análisis dimensional, la tercera ley de Kepler relativa al movimiento de los planetas, sabiendo que el periodo de una revolución planetaria es una expresión monómica del eje mayor (A), de la constante de gravitación universal (G) y de la masa del sol ( $M_s$ ).

$$T^\sigma \propto A^\alpha \cdot G^\beta \cdot M_s^\delta$$

$$[T]^\sigma = [A]^\alpha \cdot [G]^\beta \cdot [M_s]^\delta \rightarrow T^\sigma = L^\alpha \left(\frac{L^3}{M \cdot T^2}\right)^\beta \cdot M^\delta \Rightarrow T^{\sigma+2\beta} = L^{\alpha+3\beta} \cdot M^{\gamma-\beta}$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma+2\beta=0 \\ \alpha+3\beta=0 \\ \delta-\beta=0 \end{matrix} \right\} \boxed{\beta=1} \rightarrow \begin{matrix} \sigma=-2\beta=-2 \\ \alpha=-3\beta=-3 \\ \delta=\beta=1 \end{matrix} \Rightarrow T^{-2} \propto A^{-3} \cdot G \cdot M_s \rightarrow \underline{\underline{T^2 \propto A^3 \cdot G^{-1} \cdot M_s^{-1}}}$$

Mejor poner T elevado a 1  $\Rightarrow$  se saca una de las incógnitas  $\alpha, \beta$  o  $\delta$ .

3. Un sistema de unidades tiene como magnitudes fundamentales la presión (p), la densidad ( $\rho$ ) y la aceleración (a). Para medir las magnitudes utilizaremos:  $p = \text{kg(fuerza)/cm}^2$ ;  $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ ;  $a = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Determinar las ecuaciones dimensionales en este sistema para el tiempo y la masa, así como la equivalencia entre la hora y la unidad derivada del tiempo en el sist. de unidades dado.

$$t = p^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot a^\gamma \rightarrow [t] = [p]^\alpha [p]^\beta [a]^\gamma$$

$$T = (MLT^{-2})^\alpha \left(\frac{M}{L^3}\right)^\beta \left(\frac{L}{T^2}\right)^\gamma \rightarrow T = M^{\alpha+\beta} \cdot L^{-\alpha-3\beta+\gamma} \cdot T^{-2\alpha-2\gamma}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$t = \rho^{1/2} \cdot p^{-1/2} \cdot a^{-1}$$

$$m = p^{\alpha'} \cdot \varphi^{\beta'} \cdot a^{\gamma'} \rightarrow [m] = M = M^{\alpha'+\beta'} \cdot L^{-\alpha'-3\beta'+\gamma'} \cdot T^{-2\alpha'-2\beta'}$$

$$\left. \begin{array}{l} M: \alpha' + \beta' = 1 \\ L: -\alpha' - 3\beta' + \gamma' = 0 \\ T: -2\alpha' - 2\beta' = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{\alpha' = 3} \\ \boxed{\beta' = -2} \\ \boxed{\gamma' = -3} \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{m = p^3 \cdot \varphi^{-2} \cdot a^{-3}}}$$

Unidades de una misma magnitud:

$$\left(\frac{q_0}{q_0}\right) = \frac{C}{C^p} \left(\frac{q_{01}}{q_{01}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{q_{02}}{q_{02}}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{q_{0n}}{q_{0n}}\right)^{\alpha_n} \rightarrow [a] = C^1 [a_1]^{\alpha_1} [a_2]^{\alpha_2} \dots [a_n]^{\alpha_n}$$

$$\left(\frac{1s}{t}\right) = \left(\frac{1N \cdot m^2}{9,8N \cdot cm^2}\right)^{1/2} \left(\frac{kg \cdot m^3}{13,6g \cdot cm^3}\right)^{-1/2} \left(\frac{m \cdot s^{-2}}{9,8m \cdot s^{-2}}\right)^{-1} \rightarrow \frac{1s}{t} = \left(\frac{1N \cdot m^2}{9,8N \cdot 10^4 \cdot cm^2}\right)^{1/2} \left(\frac{kg \cdot m^3}{13,6 \cdot 10^3 \cdot kg (10^2)^3 \cdot cm^3}\right)^{-1/2} \left(\frac{m \cdot s^{-2}}{9,8m \cdot s^{-2}}\right)^{-1}$$

$$\frac{1s}{t} = \sqrt{\frac{1}{9,8 \cdot 10^4}} \cdot \sqrt{13,6 \cdot 10^3} \cdot 9,8 = 3,651 \rightarrow 1s = 3,651t$$

$$1h = 3600s = 3,651 \cdot 3600t \Rightarrow \underline{\underline{1h = 13143,6t}}$$

#### 4. Calidad de la medida

##### ◦ Medición de las magnitudes físicas

MEDIR → Tomar una cantidad (mensurado) y compararla con la unidad.

El resultado es la MEDIDA, que viene dada por un valor numérico, una incertidumbre (valoración de la calidad de la medida) y una unidad (la empleada).

$$Ej: (3,25 \pm 0,01)m$$

Para obtener el valor numérico, utilizamos los instrumentos de medida.

Estos pueden ser de dos maneras:

- Directa: al aplicarlo sobre un mensurado facilita directamente una indicación

$$y = x'$$

y: mensurado  
x': lectura del instrumento

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

escala

pequeña que puede apreciar el instrumento



EXACTITUD → indica la estimación de cuánto se acerca al valor real.

PRECISIÓN → depende de su división de escala.

Ej: Reloj - preciso porque da horas, minutos y segundos; pero no exacto porque no tiene porque indicar la correcta.

Medidas { Directas: por lectura del instrumento  
Indirectas: a través de una relación en la que intervienen otros mensurandos, medidos previamente

• Magitudes de influencia. Incertidumbre en la medida

Causas de imperfección en las medidas:

INSTRUMENTO { Precisión  
Calibrado

MENSURANDO - No siempre se puede definir un valor numérico.

EL OPERADOR { Error visual (m. dir)  
No utilizar la expresión adecuada (m. ind)

OTRAS - Presión, temperatura, ...

Necesidad de tener calidad en la medida

- Controlar valores medios
- Determinar el campo de variabilidad de las magnitudes de influencia.

Magitudes de influencia [ No son objeto de nuestro estudio, pero perturban la medida  
No se pueden determinar exactamente sus valores medios, ni reducirlos a cero.

Resultado: valor convencionalmente verdadero (valor num. + incertidumbre)

**INCERTIDUMBRE**

Valoración de la calidad de la medida  
Representa la semiamplitud de un intervalo donde se encuentra el valor verdadero ( $x-u, x+u$ )  
Cantidad de la misma magnitud medida, referida

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



$u(y)$  Incertidumbre de  $y$   $y \pm u(y)$

$u(y) = k u(y) \rightarrow k=1,2,3$  K es el factor de recubrimiento

$$\downarrow \\ y \pm u(y)$$

Derivadas

$$y = x^2 \rightarrow y = f(x)$$

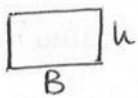
$$\frac{dx}{dy} = 2x$$

$$y = x_1^2 \cdot x_2^3 \rightarrow y = f(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 \cdot x_2^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1^2 \cdot 3x_2^2$$

Ej: 1. Calcular el área de un rectángulo



$$A = Bh$$

$$u_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)^2 u_B^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)^2 u_h^2$$

$$u_A^2 = h^2 u_B^2 + B^2 u_h^2 \rightarrow u_A = \sqrt{h^2 u_B^2 + B^2 u_h^2} \Rightarrow A \pm u_A$$

2. Conociendo  $u_D$  de una esfera  $D$ , determinar la incertidumbre absoluta y relativa en el cálculo de su volumen <sup>diámetro</sup>.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$$

$$u_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 u_D^2 = \left(\frac{3}{6} \pi D^2\right)^2 u_D^2 \rightarrow \underline{\underline{u_V = \frac{1}{2} \pi D^2 u_D}}$$

$$\underline{\underline{w_V = \frac{u_V}{V} = \frac{\frac{1}{2} \pi D^2 u_D}{\frac{1}{6} \pi D^3} = 3 \frac{u_D}{D} = 3w_D}}$$

3. Para determinar el valor de la variable dependiente y se utiliza la función  $y = x_1^3 \cdot x_2^2$ . Si se miden directamente los valores  $x_1$  y  $x_2$ , se obtienen unas incertidumbres relativas  $w_{x_1} = 1 \cdot 10^{-4}$  y  $w_{x_2} = 2 \cdot 10^{-4}$ . Determinar la incertidumbre relativa  $w_y$  del valor probable de  $y$ .

$$u_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 u_{x_2}^2 = (3x_1^2 \cdot x_2^2)^2 (w_{x_1} x_1)^2 + (x_1^3 \cdot 2x_2)^2 (w_{x_2} x_2)^2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Determine la incertidumbre relativa en el valor de la aceleración de la gravedad. Para medir la gravedad se utiliza un péndulo simple. Si las incertidumbres relativas en función de la longitud y el periodo es del 1% (0,01), determinar la incertidumbre relativa de la aceleración.

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \sqrt{g} = \frac{\sqrt{l}}{T} \Rightarrow g = \frac{l}{T^2} \quad \omega_l = \omega_T = 0,01$$

$$u_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u_l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u_T^2 = \left(\frac{1}{T^2}\right)^2 u_l^2 + \left(-\frac{l}{T^3}\right)^2 u_T^2 = \left(\frac{1}{T^2}\right)^2 (\omega_l \cdot l)^2 + \left(-\frac{l}{T^3}\right)^2 (\omega_T \cdot T)^2$$

$$\omega_g^2 = \frac{u_g^2}{g^2} = \left(\frac{1 \cdot T^2}{T^2 \cdot l}\right)^2 (\omega_l \cdot l)^2 + \left(\frac{-l \cdot T^2}{T^3 \cdot l}\right)^2 (\omega_T \cdot T)^2 = 1^2 \omega_l^2 + (-1)^2 \omega_T^2 = 0,01^2 + 0,01^2 = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\omega_g = \sqrt{2} \cdot 10^{-2}}}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

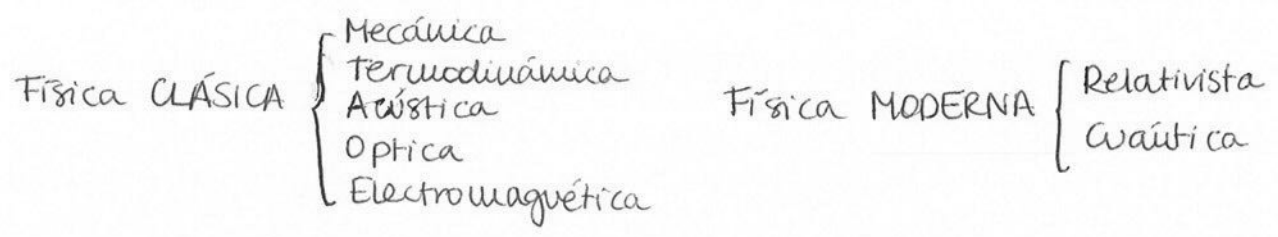
The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# TEMA 1. Magnitudes físicas: unidades y medidas (RESUMEN)



## • El Sistema Internacional (SI)

Magnitudes Fundamentales → Unidades básicas

Longitud	Metro (m)
Masa	Kilogramo (kg)
Tiempo	segundo (s)
Temperatura termodinámica	Kelvin (K)
Intensidad de corriente	Amperio (A)
Intensidad luminosa	Candela
Cantidad de materia	Mol

### Multiplos

Deca (da) → 10 <sup>1</sup>	deci (d) → 10 <sup>-1</sup>
Hecto (h) → 10 <sup>2</sup>	centi (c) → 10 <sup>-2</sup>
Kilo (k) → 10 <sup>3</sup>	mili (m) → 10 <sup>-3</sup>
Mega (M) → 10 <sup>6</sup>	micro (μ) → 10 <sup>-6</sup>
Giga (G) → 10 <sup>9</sup>	nano (n) → 10 <sup>-9</sup>
Tera (T) → 10 <sup>12</sup>	pico (p) → 10 <sup>-12</sup>
Peta (P) → 10 <sup>15</sup>	fermo (f) → 10 <sup>-15</sup>
Exa (E) → 10 <sup>18</sup>	atto (a) → 10 <sup>-18</sup>
Zetta (Z) → 10 <sup>21</sup>	zepto (z) → 10 <sup>-21</sup>
Yotta (Y) → 10 <sup>24</sup>	yocto (y) → 10 <sup>-24</sup>

## • Incertidumbre



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## T2 - VECTORES Y SISTEMAS DE VECTORES

## 1. Magnitudes escalares y vectoriales.

Magnitudes escalares: se identifican con solo los números.

Magnitudes vectoriales: no solo están identificadas con los números, sino que necesitamos una dirección y un sentido.

Vector  $\rightarrow$  segmento orientado, por lo que está definido por dos extremos y posee simetría central, pero al estar orientado no es lo mismo el origen que el final.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \quad \begin{array}{l} A: \text{origen} \\ B: \text{extremo} \end{array}$$

Podemos definir tres tipos de vectores

Libres: están determinados conociéndose el módulo, la dirección y el sentido  $\rightarrow$  suma, producto por escalares.

Deslizante: además, necesitamos saber cuál es la recta soporte del vector.

Ligado: además del lo del vector libre, necesitamos conocer cuál es su punto de aplicación.

Un espacio vectorial es un conjunto formado por vectores. Con respecto a la suma de vectores (ley interna) cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y simétrico (grupo abeliano). Con respecto al producto de escalares (ley externa), cumple las propiedades asociativa, ya sea con escalares o vectores, y la existencia del elemento unidad. Todas estas propiedades dotan a la cuaterna  $(K^n, K, +, \cdot)$  de la estructura de espacio vectorial.

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  es un sistema generador si un vector <sup>se</sup> puede obtener por combinación lineal de dichos vectores.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

del espacio y cuyo número máximo es el número del espacio.

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n$$

$(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow$  componentes de  $\vec{u}$ : conjunto ordenado y la descomposición de esta base es única

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Componentes de los vectores de la base

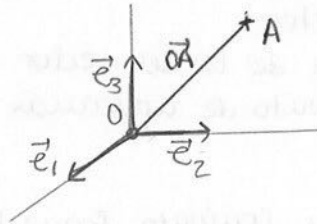
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$$

## 2. Sistemas de referencia y orientación en el espacio.

Vamos a tomar el espacio de puntos o espacio afín. En este espacio vamos a elegir un sistema de referencia, formado por un punto que es origen del sistema (0) y por una base (1D  $\{\vec{e}_1\}$ , 2D  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , 3D  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ).

3D  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$



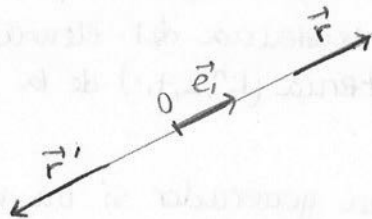
$$\vec{OA} = \vec{r} = (q_1 \vec{e}_1, q_2 \vec{e}_2, q_3 \vec{e}_3)$$

$(q_1, q_2, q_3)$  componentes de  $\vec{r}$  y coordenadas de A respecto a esa referencia.

Orientación:

1D  $(0, \vec{e}_1)$

RECTA



$$\vec{r} = q_1 \cdot \vec{e}_1 \quad (q_1 > 0)$$

$$\vec{r}' = q'_1 \cdot \vec{e}_1 \quad (q'_1 < 0)$$

un eje es una recta direccionada por un vector, en este caso el vector  $\vec{e}_1$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

(siempre por el camino más

recto del 1º al 2º)



3D  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{r} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + q_3 \vec{e}_3$$

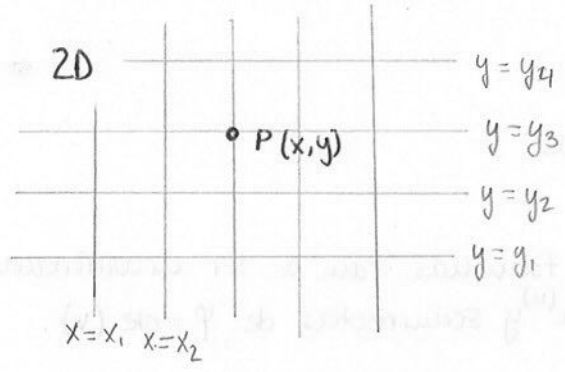
A derechas:  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1), (\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Nº de inversiones  
PAR

A izquierdas:  $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3), (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2), (\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$

IMPAR

Analizar sistemas de referencia



$$P = (x_3, y_3)$$

Las familias de curvas son RECTAS

3D Las familias de superficies son PLANOS

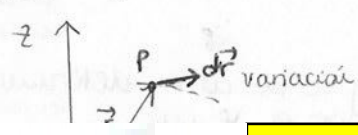
$$P = (x_1, y_1, z_1)$$

- Plano:  $\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}$
- Espacio:  $\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Sistema de ejes ortogonales (L)  
Si además tienen la misma medida, se les denomina ortonormales.

Los vectores del sistema de ejes coordenados son unitarios y forman una base unitaria.

Eje de coordenadas  $\rightarrow$  intersección de dos planos define una recta, que se direcciona por un vector unitario.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$P(x, y)$$

$$P(u, v)$$

$$x = x(u, v)$$

$$u = u(x, y)$$

$$y = y(u, v)$$

$$v = v(x, y)$$

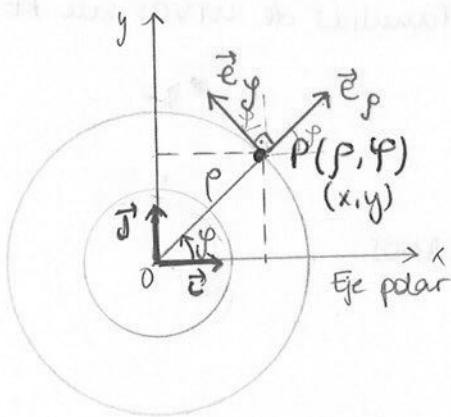
El sistema no degenera: JACOBIANO

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Un sist. degenera cuando por un punto del espacio pasa más de una familia  $u, v, w$ . Por un punto solo debería pasar una de  $x$ , otra de  $y$ , otra de  $z$  (no degenerado).

Si salen puntos en los que  $J=0 \rightarrow$  los pts. están degenerados

PLANO  $\rightarrow$  coordenadas polares planas



Nuestras familias van a ser circunferencias de  $\rho = cte(u)$  y semirrectas de  $\varphi = cte(v)$ .

$\rho$ : radio de la circunferencia por la que pasa  
 $\varphi$ : ángulo en el que se encuentra

$\rho$  y  $\varphi \rightarrow$  sistema ordenado

$$x = x(u, v) \rightarrow x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = y(u, v) \rightarrow y = \rho \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \operatorname{sen}^2 \varphi = \rho$$

$\rightarrow$  El sistema solo degenera en el origen O. pueden pasar las semirrectas por él  $\rightarrow \varphi$ ?

$$\vec{e}_o = \cos \varphi \vec{i} + \operatorname{sen} \varphi \vec{j}$$

$$\vec{e}_\rho = \operatorname{tg} \text{ a la curva determinada por el } \rho \text{ de la semirrecta}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

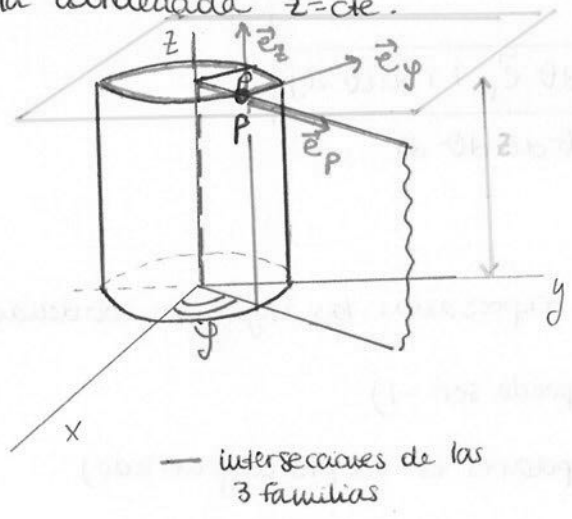
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$dS = d\rho \, d\varphi = \rho \, d\rho \, d\varphi$$

ESPACIO → coordenadas cilíndricas

Está formado por 3 familias de superficies: un cilindro de  $r = \rho$ , un semiplano que forma un ángulo  $\varphi$  con el plano XOY y un plano que me da la coordenada  $z = \text{cte}$ .



$P(\rho, \varphi, z)$   
 $P(x, y, z)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \rho \sin \varphi & \varphi = \arctg \frac{y}{x} \\ z = z & z = z \end{cases}$$

(⊖ coord. polares)  $J = \rho$

$-\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  → perpendiculares entre sí y donde está P; unitarios

- $\vec{e}_\rho$ : tg. a línea de  $\varphi = \text{cte}$
- $\vec{e}_\varphi$ : tg a la circunferencia
- $\vec{e}_z$ : tg a la generatriz del cilindro

El sistema es degenerado en el eje z

$$\left. \begin{matrix} d\rho = d\rho \\ d\varphi = \rho d\varphi \\ dz = dz \end{matrix} \right\} \boxed{d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z}$$

$$\begin{matrix} dS_{\rho\varphi} = \rho d\rho \cdot d\varphi \\ dS_{\rho z} = d\rho \cdot dz \\ dS_{\varphi z} = \rho d\varphi dz \end{matrix} \qquad dV = \rho d\rho \cdot d\varphi \cdot dz$$

ESPACIO → coordenadas esféricas

P: 3 familias de   
 esfera  $r = \text{cte}$  -   
 cono  $\theta = \text{cte}$  -



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$\vec{e}_\varphi$ : tg a la circunferencia

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$J = r^2 \sin \theta$$

↓  
Sistema degenerado  
en el origen y en el  
eje z.

$$dr_r = dr$$

$$dr_\theta = r d\theta$$

$$dr_\varphi = r \sin \theta d\varphi$$

$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

### Ejercicios .

1. ¿En qué sistema de coordenadas están expresadas las siguientes coordenadas?

$(-1, \pi/3)$  → coordenadas cartesianas (P no puede ser -1)

$(0, \pi/2)$  → coord. cartesianas (el 0 en pdares es un pto. degenerado)

$(\pi/2, 0)$  → ambas : cartesianas o pdares

2. Un punto tiene de coord. cartesianas  $(1, 1, 2)$ . Obtener las coordenadas esféricas.

Esféricas  $(r, \theta, \varphi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arctg \frac{\sqrt{1+1}}{2} = \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \text{ rad } \wedge 45^\circ$$

3.  $P(r, \theta, \varphi) \rightarrow (5, \pi/4, \pi/3)$ . Obtener las coord. cartesianas

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi = 5 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi = 5 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

$$z = r \cdot \cos \theta = 5 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

4. Expresar en la base de coord. cartesianas el campo de fuerzas que en coord. esféricas viene dado por:  $\vec{F}(r) = -kr^2 \vec{u}_r$  |  $k$ : de. que representa a  $\vec{e}_r$

# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

5. Expresar en la base de coord. Cartesianas que en coord. esféricas viene dado por  $\vec{F}(r, \theta) = -kr^2 \cos \theta \vec{u}_r$  y representa el primer vector de la base de coord. esféricas aplicado en el punto  $P$ .

$$z = r \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{z}{r}$$

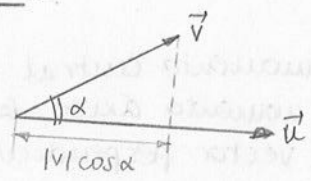
$$\vec{F}(r, \theta) = \vec{F}(x, y, z) = -k \cdot r^2 \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -k \cdot z (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

### 3. Operaciones vectoriales

Producto escalar  $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha}$   $\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot \text{proy}_u \vec{v} = v \cdot \text{proy}_v \vec{u}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}|$$



Propiedades:

1. Conmutativo:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. Asociativo respecto al producto por escalares:  $\lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda \vec{v}$
3. Distributivo respecto a la suma de vectores:  $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$
4. Nulidad del producto:  $\vec{u} = \vec{0}, \vec{v} = \vec{0}$  o  $\alpha = 90^\circ$
5. Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$  no implica  $\vec{v} = \vec{w}$ , a menos que se verifique  $\forall \vec{u}$
6.  $-u \cdot v \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq u \cdot v$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}$$

Aplicaciones:

- obtener el módulo de un vector
- Conocer el ángulo entre dos vectores dados
- Definición de la norma de un vector ( $\text{nor } \vec{u} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = u^2$ )
  - $\text{nor}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{nor } \vec{u} + \text{nor } \vec{v} + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$
  - $\text{nor}(\lambda \vec{u}) = \lambda^2 \text{nor } \vec{u}$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Propiedades:

1. Anticommutativo:  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
2. Asociativo respecto a escalares:  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda\vec{v}$
3. Distributivo respecto a la suma de vectores:  $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$
4. Nulidad del producto:  $\vec{u} = \vec{0}$ ,  $\vec{v} = \vec{0}$  o  $\alpha = 0^\circ$ .
5. Si  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$  no implica que  $\vec{v} = \vec{w}$ , a menos que se verifique para todo vector  $\vec{u}$
6.  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \end{array} \right\} \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$$

Aplicaciones:

- Calcular el momento central de un vector deslizante
- Calcular el momento áxico de un vector deslizante
- Obtener un vector perpendicular a un plano

Producto mixto  $\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v}| w \cos \alpha = S \cdot h = V \text{ (volumen del paralelepípedo)}$$

Propiedades:

1. Circularmente conmutativo:  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$
2. Asociativo respecto al producto por escalares:  $\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w})$
3. Distributivo respecto a la suma de vectores:  $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$
4. Nulidad del producto mixto: a)  $\vec{u} = \vec{0}$ ,  $\vec{v} = \vec{0}$  o  $\vec{w} = \vec{0}$   
 b) Dos de ellos con la misma dirección  
 c) Los tres son // a un mismo plano  
 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow$  linealmente dependientes

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad \left| \begin{array}{ccc} u_x & u_y & u_z \end{array} \right|$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Otras operaciones vectoriales

◦ Doble producto vectorial

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{c})}_{\lambda} \vec{b} - \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{c})}_{\mu} \vec{a} = \lambda \vec{b} - \mu \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0} \text{ o } \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0} \rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0} \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{array} \right. \lambda = \mu = 0$$

◦ Producto escalar de dos productos vectoriales

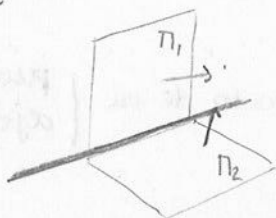
$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{w} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{a}, \vec{b}) = [(\vec{c} \times \vec{d}) \times \vec{a}] \cdot \vec{b} = \\ &= [(\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{d} - (\vec{d} \cdot \vec{a}) \vec{c}] \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

- Norma del producto vectorial

$$\text{nor}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \text{nor} \vec{a} \cdot \text{nor} \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

◦ Producto vectorial de dos productos vectoriales

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{w} = (\vec{a} \cdot \vec{w}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{w}) \vec{a} = (\vec{w} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{w} \cdot \vec{b}) \vec{a} = \\ &= (\vec{c} \cdot \vec{a}, \vec{a}) \vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{a}, \vec{b}) \vec{a} \end{aligned}$$



$\vec{a}, \vec{b} \in \pi_1 \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \pi_1$   
 $\vec{c}, \vec{d} \in \pi_2 \quad \vec{c} \times \vec{d} \perp \pi_2$

PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UNA RECTA O UN PLANO

3D } 2D (plano)  
 } 1D (recta)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$(\vec{u}_s \times \vec{v}) \times \vec{u}_n = (\vec{u}_s \times \vec{v}_1) \times \vec{u}_n = (\vec{u}_s \cdot \vec{u}_n) \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_n) \vec{u}_s$$



$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}_n = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_n + \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_n = \underbrace{v_2}_{\vec{v}_2} (\vec{u}_s \cdot \vec{u}_n)$$

$$v_2 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_n}{\vec{u}_s \cdot \vec{u}_n}$$

$$\boxed{\vec{v}_2 = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u}_n) \vec{u}_s}{\vec{u}_s \cdot \vec{u}_n}}$$

Proyecciones ortogonales:  $\mathcal{L} \perp \Pi \rightarrow \vec{u}_s = \vec{u}_n = \vec{u}$

$$\underline{\underline{\vec{v}_1 = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{v}_2 = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}}}$$

Ej: Dados los vectores  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$  y  $\vec{c} = \vec{k}$ , determinar la proyección ortogonal del vector  $\vec{c}$  sobre el plano que forman  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

$$\text{proj}_{\Pi} \vec{c} = (\vec{u} \times \vec{c}) \times \vec{u}$$

$$\vec{u} \perp \Pi \quad \vec{u} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$$

así es unitario

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

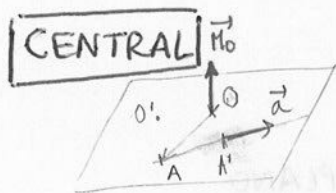
$$\vec{u} \times \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-\vec{i} - \vec{j})$$

$$(\vec{u} \times \vec{c}) \times \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3} (-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})}}$$

#### 4. Vectores deslizantes

Características

Momento de un vector deslizante respecto de un punto  $\rightarrow$  central  
eje  $\rightarrow$  arico



$$\vec{M}_0 = \vec{OA} \times \vec{a}$$

1. El momento es indep. del punto A elegido sobre la recta soporte.

$$\vec{M}_0 = \vec{OA}' \times \vec{a} = (\vec{OA} + \vec{AA}') \times \vec{a} = \vec{OA} \times \vec{a} + \vec{AA}' \times \vec{a} \quad (11)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Expresión analítica

$$O(x_0, y_0, z_0)$$

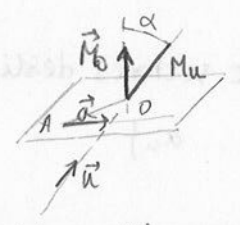
$$A(x, y, z)$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

**ÁXICO** Es un escalar, proyección ortogonal sobre el eje del que estamos calculando el momento central de un vector deslizante respecto a un punto que pertenece al eje.

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = (\vec{OA} \times \vec{a}) \cdot \vec{u} = (\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u})$$



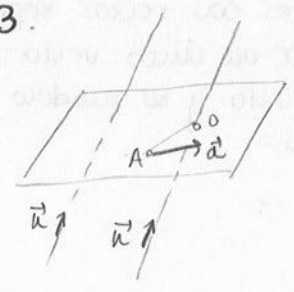
1. Es independiente del punto O elegido

$$O' \in \text{eje} \quad M_u' = (\vec{O'A}, \vec{a}, \vec{u}) = (\vec{O'O} + \vec{OA}, \vec{a}, \vec{u}) = \underbrace{(\vec{O'O}, \vec{a}, \vec{u})}_0 + \underbrace{(\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u})}_{M_u}$$

2. Condición de nulidad

$M_u = 0$  si  $\vec{OO'}$  y  $\vec{a}$  en el mismo plano

3.



$$M_u = (\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u}) = (\vec{OO'} + \vec{OA}, \vec{a}, \vec{u}) = (\vec{OO'}, \vec{a}, \vec{u}) + (\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u})$$

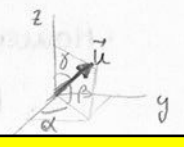
$$M_u = M_u' + (\vec{OO'}, \vec{a}, \vec{u})$$

$$M_u = M_u' \text{ si } (\vec{OO'}, \vec{a}, \vec{u}) = 0$$

Expresión analítica

$$M_u = \begin{vmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ a_x & a_y & a_z \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \delta \end{vmatrix}$$

Un vector unitario está representado por los cosenos directores.



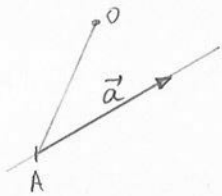
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

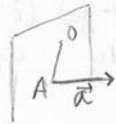
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 5. Vectores ligados

$$\text{Vincial } U_0 = \vec{OA} \cdot \vec{a}$$



$$U_0 = 0 \text{ si } \vec{OA} \perp \vec{a}$$



$$\text{Expresión analítica: } U_0 = (x-x_0)a_x + (y-y_0)a_y + (z-z_0)a_z$$

## 6. Sistemas de vectores deslizantes

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

### Equivalencia entre sistemas de vectores deslizantes

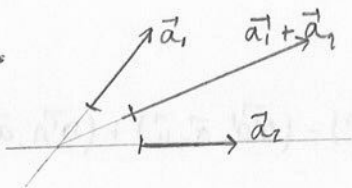
Los sistemas son equivalentes cuando podemos pasar de uno a otro mediante las siguientes operaciones:

1,2.



Suprimir o añadir dos vectores que están sobre la misma recta soporte de igual módulo y sentidos contrarios.

3,4.



Sumar o descomponer dos vectores con rectas soportes que concurren en un punto por un único vector cuya recta soporte pase por dicho punto y su módulo sea la suma de los otros dos vectores.

5,6. Se puede añadir o quitar el vector  $\vec{0}$ .

• Resultante de la suma de vectores

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$$

• Momento total del sistema respecto de un punto

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^n \vec{PA} \times \vec{a}_i$$

# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

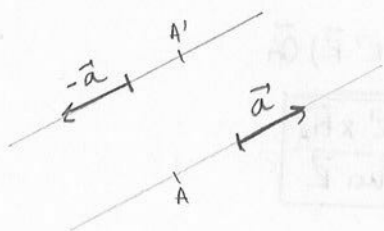
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistema formado por un par de vectores deslizantes

Vectores con mismo módulo, misma dirección y sentido contrario

$\{\vec{a}, -\vec{a}\}$



$\vec{R} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$\vec{M}_P = \vec{PA} \times \vec{a} + \vec{PA'} \times (-\vec{a}) = (\vec{PA} - \vec{PA'}) \times \vec{a} = (\vec{A'P} + \vec{PA}) \times \vec{a}$

$\vec{M}_P = \vec{AA} \times \vec{a}$   
 $\vec{M}_Q = \vec{A'A} \times \vec{a}$

El momento de un par de vectores es el mismo para cualquier punto del espacio.

Reducción de un sistema de vectores deslizantes

$S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$

$\underline{P} \{ \vec{R}, \vec{M}_P \}$        $\mathcal{T} [ \vec{R}, \vec{M}_P ]$   
torser

$\{ \vec{R}, \vec{p}, -\vec{p} \}$   
con  $\vec{M}_p$

$S \left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \left[ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_P \\ \vec{R}' \\ \vec{M}_Q \end{matrix} \right] \right\} \rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \times \vec{R}$

$\mathcal{T} [ \vec{R}, \vec{M}_P ] \left\{ \begin{matrix} \vec{R} = \vec{R}' \\ \vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \times \vec{R} \end{matrix} \right.$

Momento de módulo mínimo

$S \rightarrow \vec{R}'$

$\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \times \vec{R}'$

$\vec{R}' = 0 \rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q$

$\vec{R}' \neq 0 \rightarrow \vec{M}_P \cdot \vec{R}' = \vec{M}_Q \cdot \vec{R}' + (\vec{PQ} \times \vec{R}') \cdot \vec{R}'$

$|\vec{R}'| \text{ proy}_{\vec{R}'} \vec{M}_P = |\vec{R}'| \text{ proy}_{\vec{R}'} \vec{M}_Q = \text{cte.}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

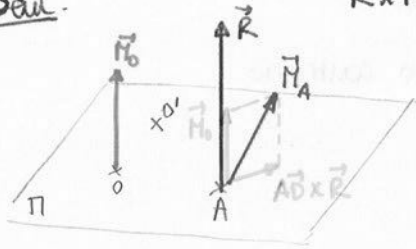
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



mínimo

la resultante y el momento respecto de ese punto sean  
vectores paralelos

Dem.



$$\vec{R} \times \vec{M}_O = 0 \quad (\vec{R} \parallel \vec{M}_O)$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{OA} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_O \times \vec{R} = \vec{M}_A \times \vec{R} + (\vec{OA} \times \vec{R}) \times \vec{R}$$

$$\vec{0} = \vec{M}_A \times \vec{R} + (\vec{OA} \times \vec{R}) \times \vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{OA}$$

$$\vec{OA} = \frac{\vec{M}_A \times \vec{R}}{\text{nor } \vec{R}} \rightarrow \boxed{\vec{AO} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_A}{\text{nor } \vec{R}}}$$

Vamos a buscar el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo momento sea paralelo a la resultante.

$O' \notin \Pi$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_{O'} \times \vec{R} = \vec{M}_O \times \vec{R} + (\vec{O'O} \times \vec{R}) \times \vec{R}$$

$$0 = 0 + (\vec{O'O} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{R} + (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{O'O}$$

$$\lambda \vec{R} - \mu \vec{O'O} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \mu \neq 0 \\ \end{array} \right\} \vec{R} \text{ y } \vec{O'O} \text{ son linealmente dependientes}$$

$$\vec{R} \parallel \vec{O'O}$$

Todos los puntos cuyo momento es de módulo mínimo se encuentran en una recta  $\parallel$  a la resultante que recibe el nombre de ecuación del eje central:

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$$

$O \in EC$  (eje central)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{M}_A (L, M, N) \\ \vec{R} (x, y, z) \end{array} \right\} \vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{OA} \times \vec{R} = (L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = (1^\circ)\vec{i} + (2^\circ)\vec{j} + (3^\circ)\vec{k}$$

$$(1^\circ) \quad (2^\circ) \quad (3^\circ)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ej 1) Dado el siguiente sistema:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} \quad \text{que pasa por } A(1,0,0)$$

$$\vec{v}_2 = 8\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \quad B(0,1,0)$$

$$\vec{v}_3 = -10\vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k} \quad C(0,0,1)$$

$$\text{Y dos momentos: } \vec{M}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{M}_2 = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

Sistema discreto

$$\vec{R} = 0$$

↳ Los 7 vectores los hemos reducido hasta un par de vectores

a) Reducir el sistema al origen de coordenadas (encontrar  $\vec{R}$  y  $\vec{M}_0$ )

$$0 \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \rightarrow \text{al ser nulo, el momento da igual en cualquier punto} \\ \vec{M}_0 = \vec{OA} \times \vec{v}_1 + \vec{OB} \times \vec{v}_2 + \vec{OC} \times \vec{v}_3 + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{array} \right.$$

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 2 & -9 \end{vmatrix} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \underline{\underline{7\vec{i} - 16\vec{j} + 2\vec{k}}}$$

b) ¿Cuál es el forso equivalente?

$$\vec{r} [\vec{R}, \vec{M}_0]$$

c) Momento resultante en el punto  $P(1,1,1)$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_0 + \vec{PO} \times \vec{R} = \vec{M}_0 + \vec{R} \times \vec{OP} = \vec{M}_0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{M}_0 = 7\vec{i} - 16\vec{j} + 2\vec{k} \quad (\text{es equiv. para cualq. pto. de esp})$$

d) Momento de módulo mínimo

$M^*$  → en este caso no existe eje central ( $\vec{R} = \vec{0}$ ) y, por tanto, lo se puede hablar del momento de módulo mínimo.

# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

② Dado un sistema cuyos módulos son:  $|\vec{a}|=14$ ,  $|\vec{b}|=21$  y  $|\vec{c}|=18$  y las rectas soporte pasan por  $A(2,0,3)$ ,  $B(1,1,2)$  y  $C(2,2,-1)$ . Los cosenos directores son proporcionales a  $(-2,-3,6)$ ,  $(1,2,2)$  y  $(1,-4,-8)$

a) Resultante del sistema

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{u}_a = \frac{-4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}}{\sqrt{4+9+36}}$$

$$\vec{u}_a = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{4+9+36}}$$

$$\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{u}_b = 21 \cdot \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{7\vec{i} + 14\vec{j} + 14\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \vec{u}_c = 18 \cdot \frac{\vec{i} - 4\vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{1+16+64}} = \frac{2\vec{i} - 8\vec{j} - 16\vec{k}}{\sqrt{1+16+64}}$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \underline{\underline{5\vec{i} + 10\vec{k}}}$$

b) Momento resultante respecto al origen

$$\vec{M}_0 = \vec{OA} \times \vec{a} + \vec{OB} \times \vec{b} + \vec{OC} \times \vec{c} = \underline{\underline{-36\vec{i} - 6\vec{j} - 25\vec{k}}}$$

c) Calcular las invariantes del sistema

$$|\vec{R}| = \sqrt{25+100} = \underline{\underline{5\sqrt{5}}}$$

proyección  
del momento  
sobre la resultante

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = 5(-36) + 0(-6) + 10(-25) = \underline{\underline{-430}}$$

d) Momento mínimo

$$\vec{M}^* \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} \rightarrow |\vec{M}^*| |\vec{R}| = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} \Rightarrow M^* = \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{-430}{5\sqrt{5}}$$

$(M^* = \vec{M}_0 \cdot \vec{u}_R)$

e) Ec. del eje central

$$A(x, y, z) \in E.C.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$A \in E.C. \Rightarrow \vec{M}_A \parallel \vec{R} \rightarrow \vec{M}_A \times \vec{R} = \vec{0}$$

$$\frac{-36-10y}{5} = \frac{-6+10x-5z}{0} = \frac{-25+5y}{10} = \lambda$$

Ec. continúa

Cartagena99

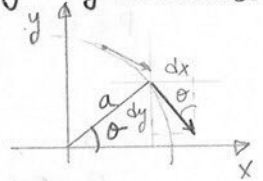
f) Ángulo que forma la resultante con el momento resultante respecto del pto. P (1,1,1)

$$\alpha \rightarrow (\vec{M}_P, \vec{R})$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{OP} = -46\vec{i} - \vec{j} - 20\vec{k}$$

$$\vec{M}_P \cdot \vec{R} = |\vec{M}_P| |\vec{R}| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{M}_P \cdot \vec{R}}{|\vec{M}_P| |\vec{R}|} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{M}_O| |\vec{R}|} \Rightarrow \alpha \approx 140^\circ$$

③ En cada punto de un cuadrante de circunferencia de radio a se considera un vector de dirección tg a la circunf. en dicho punto, módulo y dx y de sentido indicado en la figura. Se pide:



a) Resultante del sistema

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{R} = \frac{2}{3}a^2\vec{i} - \frac{a^2}{3}\vec{j}}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} dx &= (y dx) \cdot \text{sen } \theta = -a^2 \text{sen}^3 \theta \cdot d\theta \\ dy &= -(y dx) \cdot \text{cos } \theta = +a^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot \text{cos } \theta \cdot d\theta \end{aligned} \right.$$

$$x = a \cdot \text{cos } \theta \rightarrow dx = a \cdot \overset{\text{derivada}}{(-\text{sen } \theta)} \cdot d\theta$$

$$y = a \cdot \text{sen } \theta$$

$$X = \int_{\pi/2}^0 dx = \int_{\pi/2}^0 -a^2 \text{sen}^3 \theta \cdot d\theta = -a^2 \int_{\pi/2}^0 \text{sen } \theta (1 - \text{cos}^2 \theta) d\theta = -a^2 \left( -\text{cos } \theta + \frac{\text{cos}^3 \theta}{3} \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \underline{\underline{\frac{2}{3}a^2}}$$

$$Y = \int_{\pi/2}^0 dy = a^2 \int_{\pi/2}^0 \text{sen}^2 \theta \cdot \text{cos } \theta \cdot d\theta = a^2 \cdot \frac{\text{sen}^3 \theta}{3} \Big|_{\pi/2}^0 = \underline{\underline{-\frac{a^2}{3}}}$$

b) Momento resultante respecto al origen

$$dM_O = \underset{\text{radio}}{a} \cdot \underset{\text{mód.}}{y dx} = -a(a^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot d\theta) = +a^3 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot d\theta$$

$$M_O = \int_{\pi/2}^0 a^3 \text{sen}^2 \theta \cdot d\theta = a^3 \int_{\pi/2}^0 \frac{1 - \text{cos } 2\theta}{2} d\theta = a^3 \cdot \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \underline{\underline{-\frac{a^3 \pi}{4}}} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{M}_O = -\frac{\pi a^3}{4} \vec{k}}}$$

soluce en el eje central  
: 0  
: 0  
lo mínimo a lo que se puede reducir el sist. es la R

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



$$-\frac{a^2}{3} z = -\frac{4}{3}a^2 z = -\frac{\pi a^3}{4} + \frac{2}{3}a^2 y + \frac{a^2}{3} x \quad \int \frac{2}{3}a^2 y + \frac{a^2}{3} x = \frac{\pi a^3}{4}$$

4) Se da un sistema de vectores deslizantes formado por los vectores:  $\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j}$  y  $\vec{v}_2 = \vec{i}$ , que pasan por rectas soporte  $A_1 = (0, 3, 0)$  y  $A_2 = (1, 0, 0)$ . Determinar el sistema equivalente dado con el menor número de vectores indicando su correspondiente recta soporte.

$$0 \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{j} \\ \vec{M}_0 = \vec{OA}_1 \times \vec{v}_1 + \vec{OA}_2 \times \vec{v}_2 = 3\vec{j} \times (-\vec{i} + \vec{j}) + \vec{i} \times \vec{i} = +3\vec{k} + 0 + 0 = \underline{3\vec{k}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \vec{R} \perp \vec{M}_0 \\ \downarrow \\ M^* = 0 \end{array}$$

$M^* = 0 \rightarrow$  el sistema se puede reducir a la resultante siempre que el punto pertenezca al eje central. (un único vector)

$$P \in EC \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_P = \vec{M}^* \rightarrow |\vec{M}^*| = 0 \Rightarrow |\vec{M}_P| = 0 \end{array} \right.$$

$$0 \left. \begin{array}{l} P \in EC \\ \vec{OP} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_0}{\text{nor } \vec{R}} = \frac{\vec{j} \times 3\vec{k}}{1} = 3\vec{i} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{OP} \text{ resulta de tomar el punto } O \text{ como } (0, 0, 0) \text{ y el punto } P \text{ como } (3, 0, 0)$$

(usar  $\vec{R} = \vec{R} \cdot \vec{R}$ )

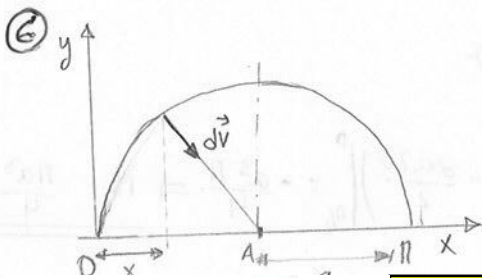
$$EC \cdot EC = \frac{x-3}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$$

5) Un sistema de vectores deslizantes tiene como resultante  $\vec{R} = \lambda\vec{i} + \vec{j}$  y el momento respecto al origen vale  $\vec{M}_0 = -4\vec{k}$ . Determinar el valor de  $\lambda$  para que el eje central pase por el punto  $A(4, 4, 0)$ .

$$\vec{R} \perp \vec{M}_0 \rightarrow M^* = 0$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{R} \times \vec{OA} = \vec{0} = \vec{M}^* \rightarrow -4\vec{k} + (\lambda\vec{i} + \vec{j}) \times (4\vec{i} + 4\vec{j}) = \vec{0}$$

$$-4\vec{k} + 4\lambda\vec{k} - 4\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \underline{\lambda = 2}$$



En cada punto de una semicircunferencia de radio  $a$  y en sentido radial, como se indica en la figura, se considera un vector de módulo  $\lambda ds$  siendo  $ds$  el elemento de arco. Se pide resultante de este sist. continuo

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

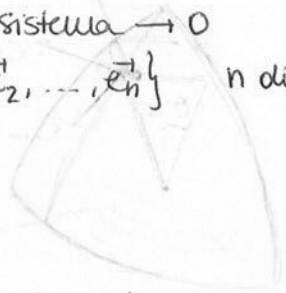
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Por favor, para todas las rectas soporte  $\rightarrow \vec{M}_A = \vec{0} \quad \vec{M}_0 = \vec{OA} \times \vec{R}$

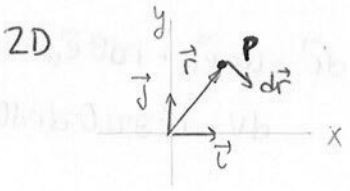


# TEMA 2. Vectores y sistemas de vectores (RESUMEN)

◦ Sistemas de referencias | Punto, origen del sistema  $\rightarrow O$   
 Base  $\rightarrow \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}$  n dimensiones



## Coordenadas CARTESIANAS

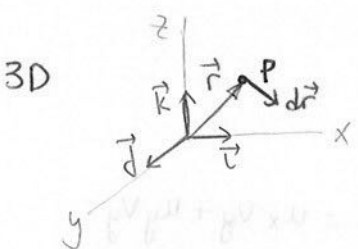


$P(x,y)$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$dS = dx \cdot dy$$



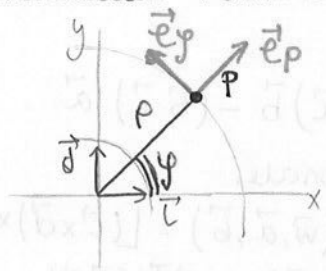
$P(x,y,z)$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

## Coordenadas POLARES PLANAS (2D)



$P(\rho, \phi)$

$$x = \rho \cdot \cos \phi$$

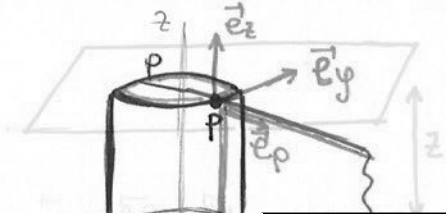
$$y = \rho \cdot \sin \phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\left. \begin{aligned} d\rho &= d\rho \\ d\phi &= \rho \cdot d\phi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d\vec{r} &= d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\phi \cdot \vec{e}_\phi \\ dS &= \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \end{aligned}$$

## Coordenadas CILÍNDRICAS (3D)



$P(\rho, \phi, z)$

$$x = \rho \cdot \cos \phi$$

$$y = \rho \cdot \sin \phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctg \frac{y}{x}$$

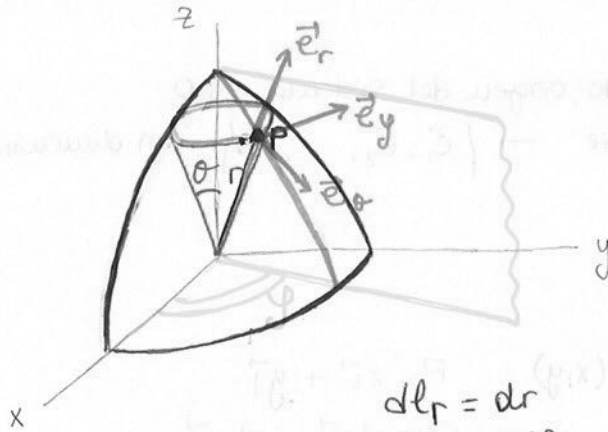


**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

## Coordenadas ESFÉRICAS (3D)



$$P(r, \theta, \varphi)$$

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi$$

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\left. \begin{aligned} dl_r &= dr \\ dl_\theta &= r d\theta \\ dl_\varphi &= r \cdot \sin \theta d\varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} d\vec{r} &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi \\ dV &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned} \right\}$$

### Operaciones vectoriales

→ Producto escalar:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = u_x v_x + u_y v_y$

→ Producto vectorial:  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} = (u_y v_z - v_y u_z, u_z v_x - v_z u_x, u_x v_y - v_x u_y)$

→ Producto mixto:  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

→ Doble producto vectorial:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$

→ Producto escalar de dos productos vectoriales:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{w} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{a}, \vec{b}) = [(\vec{c} \times \vec{d}) \times \vec{a}] \cdot \vec{b} = \\ &= [(\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{d} - (\vec{d} \cdot \vec{a}) \vec{c}] \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

→ Producto vectorial de dos productos vectoriales:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{w} = (\vec{a} \cdot \vec{w}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{w}) \vec{a} = (\vec{w} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{w} \cdot \vec{b}) \vec{a} = \\ &= (\vec{c} \cdot \vec{d}, \vec{a}) \vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{d}, \vec{b}) \vec{a} \end{aligned}$$

Cartagena99

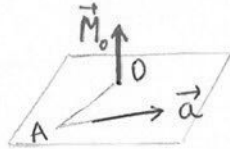
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

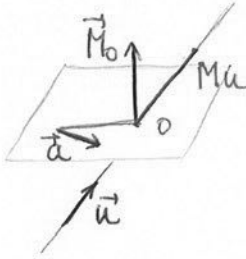
◦ Vectores deslizantes

- Momento CENTRAL (respecto de un PUNTO)



$$\vec{M}_0 = \vec{OA} \times \vec{a}$$

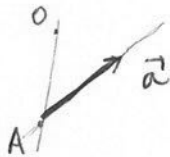
- Momento ÁXICO (respecto de un EJE)



$$M_u = \vec{M}_0 \cdot \vec{u} = (\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u})$$

◦ Vectores ligados

Vinial



$$v_0 = \vec{OA} \cdot \vec{a}$$

◦ Sistemas de vectores deslizantes

~ Resultante de la suma de vectores:  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$

~ Momento total del sistema respecto de un punto:  $\vec{M}_p = \sum_{i=1}^n p\vec{A} \times \vec{a}_i$

~ Momento de un sistema respecto de dos puntos:  $\vec{M}_Q = \vec{M}_p + Q\vec{P} \times \vec{R}$

~ Momento de módulo mínimo:  $M^* \vec{r}^* = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} \rightarrow M^* = \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• Vectores distribuidos

- Momento Central (respecto de un punto)



- Momento Axial (respecto de un eje)



• Vectores coplanares



• Principios de vectores distribuidos

• Resultante de la suma de vectores:  $R = \sum_{i=1}^n F_i$

• Momento total del sistema respecto de un punto:  $M_P = \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i$

• Momento de un sistema respecto de un eje:  $M = \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i$

• Principios de reducción:  $F + E = M \cdot E$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## T3- ESTÁTICA DE SISTEMAS

### 1. Definiciones de punto material, sólido rígido, masa y fuerza

Pto material → ente sin dimensiones pero con masa. Sirve para resolver problemas, pues simplifica mucho los cálculos (no hay que tener en cuenta la rotación del cuerpo).

Sólido rígido → cuerpo en el que la posición relativa de dos puntos permanece constante en el tiempo. Así, las fuerzas que actúan sobre el sistema pueden ser consideradas vectores deslizantes.

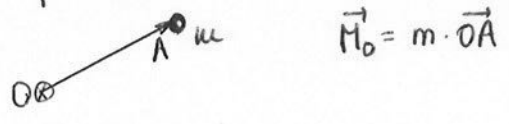
Masa → cantidad de materia que tiene un cuerpo; constante

Peso → representa la fuerza con que un campo de gravedad atrae a dicho cuerpo o masa. El concepto de fuerza aparece siempre que haya dos masas cerca.

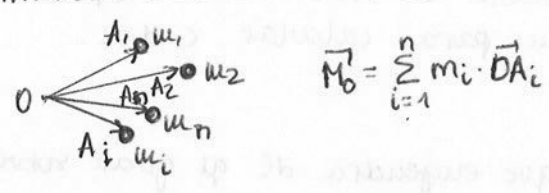
### 2. Momentos estáticos respecto a puntos

Los momentos estáticos son productos de distancias a puntos, rectas o planos. Los momentos de inercia tienen las distancias al cuadrado.

• Masa puntual



• Distribución discreta de masa



• Distribución continua de masa

$$\vec{M}_O = \int \vec{r} dm = \begin{cases} dm = \rho \cdot dl & \Rightarrow \vec{M}_O = \int \rho \vec{r} dl \\ dm = \sigma \cdot dS & \Rightarrow \vec{M}_O = \int \sigma \vec{r} dS \end{cases}$$

Integral doble



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$M_O = \sum_{i=1}^n O'A_i \cdot m_i = \sum (O'O + O'A_i) m_i$$

### 3. Centro de masas de un sistema. Teoremas de Guldin

Centro de masas  $\rightarrow$  pto. respecto al cual el momento lineal es cero.

$$\vec{M}_C = \vec{0} = \sum \vec{C}A_i m_i$$

No tiene por qué tener masas ni coincidir con el centro geométrico

1. Existe  $\vec{M}_C = \vec{0} = \vec{M}_O + \vec{C}A M \Rightarrow \vec{OC} = \frac{\vec{M}_O}{M}$

2. Unicidad  $\exists O' \vec{M}_{O'} = \vec{0}$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + O'O M \rightarrow 0 = 0 + O'O M \quad M \neq 0 \Rightarrow O'O = \vec{0}$$

$$C = (x_c, y_c, z_c) \quad \vec{OC} = (x_c, y_c, z_c) = \frac{\vec{M}_O}{M} \quad \vec{M}_O = \sum O'A_i m_i$$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

$$x_c = \frac{\int x \, dm}{M}$$

$$y_c = \frac{\int y \, dm}{M}$$

$$z_c = \frac{\int z \, dm}{M}$$

$$\left. \begin{aligned} dm &= \lambda \, dl \\ dm &= \sigma \, dS \\ dm &= \rho \, dV \end{aligned} \right\} (P)$$

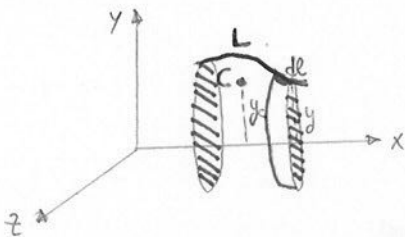
Propiedad del centro de masas

$\hookrightarrow$  Posibilidad de concentrar toda la masa del sistema en el c.d.m. a efectos de calcular momentos estáticos

$$\vec{M}_C = \vec{0} = \vec{M}_O + \vec{CO} M \Rightarrow \vec{M}_O = M \cdot \vec{OC}$$

### Teoremas de Guldin

Con distribución continua de masa en una línea o superficie, se puede aplicar los teoremas de Guldin para calcular c.d.m.



La superficie que engendra de al girar sobre el eje x  $\rightarrow dS = 2\pi y \, dl$

$\Downarrow$

$$S = 2\pi \int y \, dl$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$V = 2\pi \int y \, dS$$

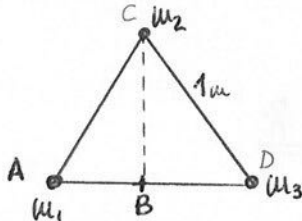
$$V = 2\pi y_c S$$

Ejercicios

① Distribuciones en el plano

A) Distribución discreta de masa

1. Tres partículas de masas  $m_1 = 1\text{kg}$ ,  $m_2 = 2\text{kg}$  y  $m_3 = 3\text{kg}$  están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de  $l = 1\text{m}$ . Calcular el c.d.m. respecto del punto A y del B.



[A] →  $m_1 = (0, 0)$   
 $m_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$   
 $m_3 = (1, 0)$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1}{1+2+3} = \frac{2}{3} \text{ m}$$

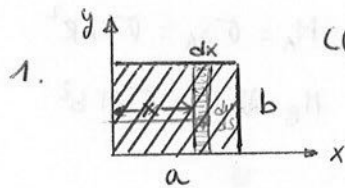
$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{0 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0}{1+2+3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ m}$$

[B] →  $m_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$   
 $m_2 = (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$   
 $m_3 = (\frac{1}{2}, 0)$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{-\frac{1}{2} + 0 + \frac{3}{2}}{1+2+3} = \frac{1}{3} \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{0 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ m}$$

B) Distribución continua de masa



$$x_c = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^a x \sigma b dx = \frac{\sigma b}{M} \int_0^a x dx = \frac{1}{M} \sigma b \frac{a^2}{2}$$

$$dm = \sigma dS = \sigma \cdot b \cdot dx$$

$$M = \sigma S = \sigma ab$$

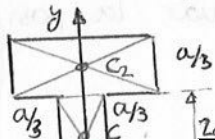
$$x_c = \frac{\sigma b a^2}{2 \sigma ab} = \frac{a}{2}$$

$$y_c = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{M} \int_0^b y \sigma a dy = \frac{\sigma a}{M} \int_0^b y dy = \frac{\sigma a}{M} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{\sigma ab^2}{2 \sigma ab} = \frac{b}{2}$$

$$dm = \sigma dS = \sigma a dy$$

El c.d.m. está en el corte de las dos diagonales

2. En secciones planas



$$y_{c1} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} a \right) = \frac{1}{3} a$$

$$y_{c2} = \frac{2}{2} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} = \left( \frac{2}{2} + \frac{1}{6} \right) a = \frac{5}{6} a$$

Dos puntos materiales

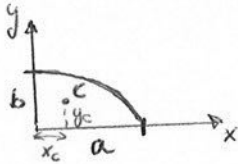


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

C) Teorema de Goldiu



$x_c$ : Gira en torno al eje  $Y \rightarrow$  superficie engendra un volumen, que será la mitad de un elipsoide bola rugby

$$V = 2\pi \cdot x_c \cdot S \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi a^2 b \right) = 2\pi \cdot x_c \cdot \frac{1}{4} (\pi ab)$$

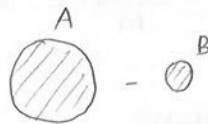
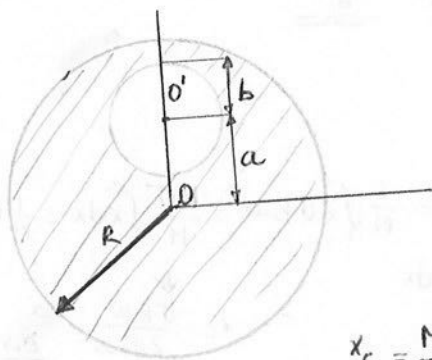
$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{x_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}}}$$

$y_c$ : Gira en torno al eje  $X \rightarrow V = 2\pi y_c \cdot S$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi b^2 a \right) = 2\pi \cdot y_c \cdot \frac{1}{4} (\pi \cdot b a) \Rightarrow \underline{\underline{y_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi}}}$$

Cuerpo de espesor despreciable, de centro  $O$ , radio  $R$  y densidad superficial  $\sigma$ , de masa constante



$A(x'_c, y'_c) \rightarrow (0, 0) \quad M_A = \sigma S_A = \sigma \pi R^2$

$B(x''_c, y''_c) \rightarrow (0, a) \quad M_B = \sigma S_B = \sigma \pi b^2$

$$x_c = \frac{M_A x'_c - M_B x''_c}{M_A - M_B} = \frac{0 - 0}{R^2 - b^2} = \underline{\underline{0}}$$

$$y_c = \frac{M_A y'_c - M_B y''_c}{M_A - M_B} = \frac{-b^2 a}{R^2 - b^2}$$

2. Se construye una figura de alambre homogéneo con dos lados de  $2L$  y un arco semicircular de radio  $R$ . Determinar la posición del c.d.m. según los ejes indicados en la figura

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$m_1 + m_2 + m_3$$

$$2L + 2L + \pi R$$

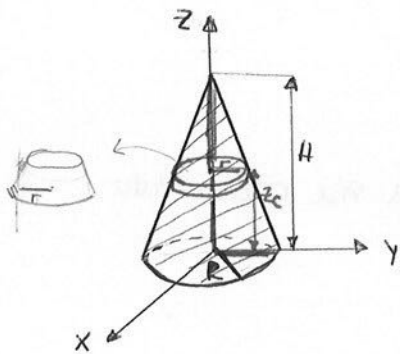
$$\frac{2L + \pi R}{2}$$



II Distribuciones en el espacio

A) Distribución continua de masa

1. Calcular c.d.m de un cuerpo homogéneo que tiene forma de cono



$$C = (x_c, y_c, z_c) = (0, 0, z_c)$$

$$z_c = \frac{1}{M} \int z dm = \frac{1}{M} \int_0^H z \cdot \rho \cdot \pi \frac{R^2}{H^2} (H-z)^2 dz$$

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dz$$

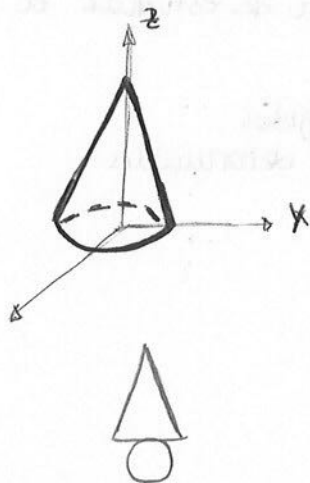
$$\frac{H}{R} = \frac{H-z}{r} \rightarrow r = \frac{R}{H} (H-z)$$

$$z_c = \frac{1}{M} \cdot \rho \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H (H^2 z - 2Hz^2 + z^3) dz = \frac{1}{M} \rho \pi \frac{R^2}{H^2} \left[ \frac{H^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \frac{2Hz^3}{3} \right]_0^H$$

$$M = \frac{1}{3} \pi R^2 H \rho$$

$$\Rightarrow z_c = \frac{\rho \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot H^4 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{3} \pi R^2 H \rho} = 3 \cdot \frac{1}{12} H \Rightarrow \underline{\underline{z_c = \frac{1}{4} H}}$$

2. De una superficie cónica



$$C = (x_c, y_c, z_c) = (0, 0, z_c)$$

$$V = 2\pi z_c \cdot s \rightarrow z_c = \frac{V}{2\pi s} = \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 H}{2\pi (\pi r^2 + \pi R^2)}$$

Triángulo  $\rightarrow z_c = \frac{1}{3} H$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

#### 4. Reacciones y esfuerzos interiores

Fuerzas activas  $\rightarrow$  actúan sobre el sistema

Fuerzas positivas o ligaduras  $\rightarrow$  surgen como resultado de las activas y las restricciones impuestas al sistema.

Ej.

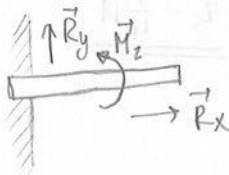
1. Cuerpo apoyado sobre una superficie lisa sin rozamiento



2. Cuerpo sujeto por unas cuerdas



3. Cuerpo empotrado en paredes



ESTÁTICA  $\Rightarrow$  Ciencia de la Física que se encarga de estudiar el equilibrio de fuerzas

Fuerzas  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vectores deslizantes} \rightarrow \text{sobre sólidos rígidos} \\ \text{Vectores ligados} \rightarrow \text{sobre sistemas deformables} \end{array} \right.$

Equilibrio  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Estático (v=0)} \\ \text{Dinámico (v=de)} \end{array} \right.$   
(a=0)

$\rightarrow$  Estática del punto material (a=0)

$\rightarrow \vec{a} = \vec{v} = \vec{v} = \vec{v}$  El tensor (P.M) de las fuerzas que

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$f(x,y,z)=0$$

$$f(x,y,z)=0$$

Estática del sólido rígido (a=0)

Como  $\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{R}_{ext} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow C$  en reposo

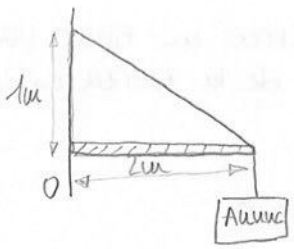
Pero el sólido podría girar  $\rightarrow \vec{M}_C = \vec{0}$

Para otro punto:  $\vec{M}_p = \vec{M}_C + \vec{PC} \times \vec{R}_{ext} = \vec{0}$

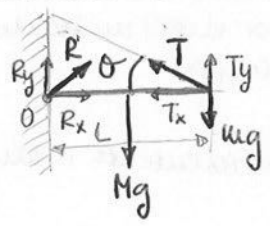
El momento resultante respecto a cualquier punto debe ser cero.

$\vec{a} = \vec{0} \rightarrow \vec{R}_{ext} = \vec{0}$   
 $\vec{M}_{p,ext} = \vec{0}$

Ej. Un anuncio de  $m = 20\text{kg}$  cuelga del extremo de una barra de  $2\text{m}$  de longitud y  $M = 4\text{kg}$ . Un cable sujeta el extremo de la barra a un pto. de la pared que está  $1\text{m}$  por encima del punto  $O$ . Determinar la tensión del cable y la fuerza ejercida por la pared en el pto.  $O$ .



1º.- Establecemos el diagrama de fuerzas



$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \left| \quad \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow R_x - T_x = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow R_y + T_y - Mg - mg = 0 \end{aligned} \right.$

$\sum \vec{M}_O = \vec{0} \rightarrow -Mg(\frac{L}{2}) - mgL + T_y \cdot L = 0$

$\text{tg } \theta = \frac{T_y}{T_x} = \frac{1}{2}$  4 ecs, 4 incógnitas

$R_x = T_x = 432\text{N}$   
 $T_y = 216\text{N}$   
 $R_y = 19,2\text{N}$

Ej. La escalera AB de peso P está apoyada sobre una pared lisa formando un ángulo  $\varphi$  con la horizontal. Un hombre de peso Q se haya en un punto D situado a un tercio de la longitud de la escalera a partir del extremo superior. Hallar la fuerza que ejerce la escalera sobre la pared y sobre el apoyo.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

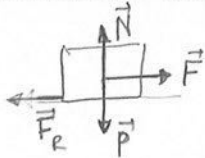
$h_2 = \frac{L}{3} \cos \varphi$

Ej. Una partícula está sometida a una fuerza  $F = (x+y-3)\vec{i} + (z-x-2)\vec{j} + (z-y-1)\vec{k}$  para una posición genérica  $(x,y,z)$ . Hallar la posición de equilibrio.

$$\sum \vec{F}_i = 0 \begin{cases} x-y-3=0 \\ z-x-2=0 \\ z-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{P(1,2,3)}$$

## 5. Rozamiento estático. Leyes de Coulomb

El rozamiento estático surge como consecuencia de deslizar un cuerpo



Leyes de Coulomb: leyes experimentales

1. La fuerza de rozamiento máxima es independiente de la superficie en contacto
2. Depende del estado y naturaleza de estas
3. Es proporcional a la componente normal de la interacción mutua entre superficies.

$F_{RE} \in [0, F_{RE\max}]$  → La fuerza de rozamiento estático no tiene un valor determinado, depende de la fuerza aplicada al cuerpo

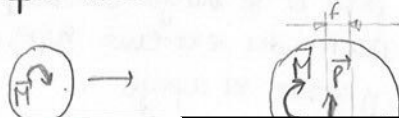
$|F_{RE\max}| = \mu_E |N|$   $\mu_E$ : coeficiente de rozamiento estático

Si el cuerpo se desliza →  $|F_{RE\max}| = \mu_D |N|$   $\mu_D$ : coeficiente de rozamiento dinámico

$$\underline{\underline{\mu_E > \mu_D}}$$

~ Rozamiento a la rodadura (traslación + giro)

Disco que rueda sin deslizar



$$M \geq N \cdot f \quad [f] = L$$

el cuerpo está a punto

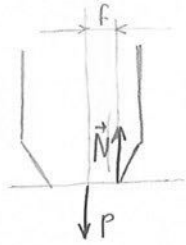
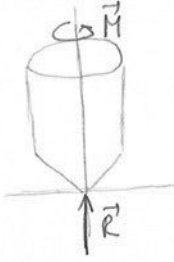
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

~ Rozamiento al pivotamiento



$$M \geq N \cdot f$$

$\vec{M}$ , par aplicado

$M < N \cdot f$ , condición de equilibrio en rodadura y pivotamiento

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background that has a subtle gradient and a slight shadow effect, giving it a three-dimensional appearance.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

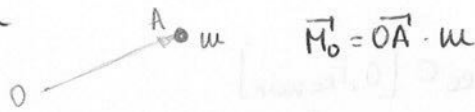
---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

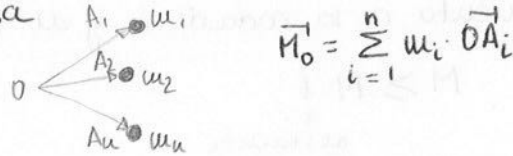
TEMA 3. Estática de sistemas (RESUMEN)

◦ Momentos estáticos

→ Masa puntual



→ Distribución discreta de masa



→ Distribución continua de masa

$$\vec{M}_o = \int \vec{r} dm$$
 Lineal:  $dm = \lambda dl \Rightarrow \vec{M}_o = \lambda \int \vec{r} dl$   
 Superficial:  $dm = \sigma dS \Rightarrow \vec{M}_o = \sigma \int \vec{r} dS$   
 Volumétrica:  $dm = \rho dV \Rightarrow \vec{M}_o = \rho \int \vec{r} dV$

◦ Centro de masas de un sistema

$$\vec{M}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{CA}_i = \vec{0} \rightarrow \text{cdm: punto respecto al cual el momento lineal es nulo}$$

$C(x_c, y_c, z_c)$

$M = \sum_{i=1}^n m_i$

Distr. discreta

$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}$

$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}$

$z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}$

Distr. continua

$x_c = \frac{\int x dm}{M}$

$y_c = \frac{\int y dm}{M}$

$z_c = \frac{\int z dm}{M}$

◦ Teoremas de Guldin

Se pueden aplicar para calcular el c.d.m. si hay una distribución CONTINUA de masa en una LÍNEA o SUPERFICIE



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

◦ Estática ( $\vec{a} = 0$ )

$$\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$
$$\vec{M}_p = \vec{0} \quad \forall P$$

→ Rozamiento estático

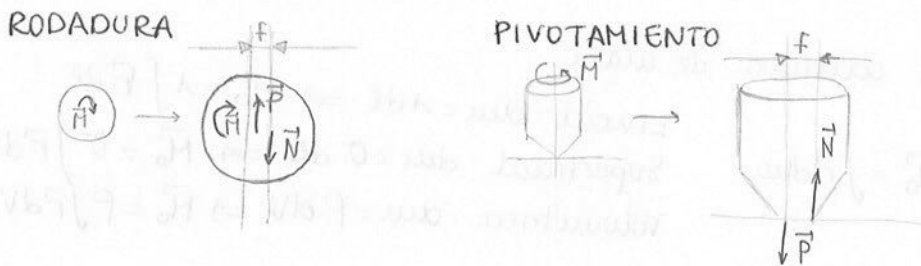
$$|F_{RE}| = \mu_E |N| \quad F_{RE} \in [0, F_{RE \max}]$$

$\downarrow$   
 $\mu = 1$

~ Rozamiento a la rodadura y al pivotamiento

$$M \geq N \cdot f$$

$\downarrow$   
distancia



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

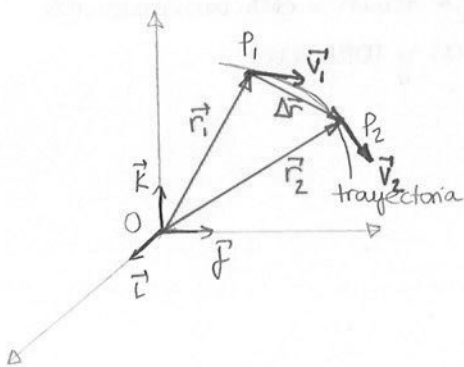
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# T4-CINEMÁTICA DEL PUNTO

## 1. Velocidad y aceleración



$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

Velocidad media:

$$\vec{v}_{m} = \frac{\vec{OP}_2 - \vec{OP}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea:

$$\vec{v}_i = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

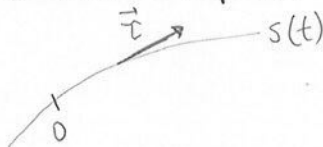
Aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

~ La función espacio



Velocidad como escalar:  $v = \vec{v} \cdot \vec{e}$   $\begin{cases} v < 0 \\ v > 0 \end{cases}$

Velocidad como vector:  $\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{e}$   $\begin{cases} |\vec{v}| \neq v & \text{a veces,} \\ |\vec{v}| = |v| & \text{v puede ser} \\ & \text{negativo} \end{cases}$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \rightarrow d\vec{r} \cdot \vec{e} = \vec{v} \cdot \vec{e} dt \Rightarrow ds = v dt$$

Ejemplos:  $s(t)$ : función espacio, función horaria

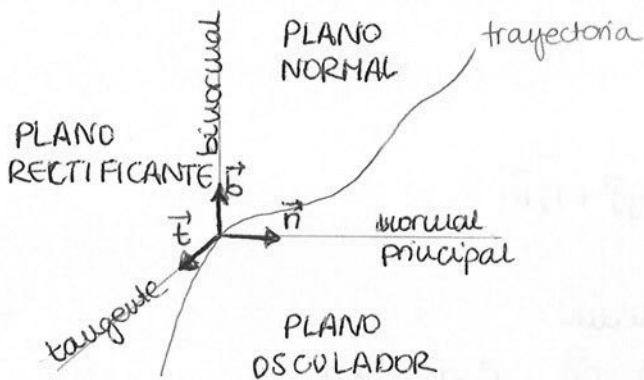
**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 2. Triedro intrínseco

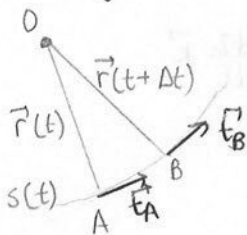


Al ser intrínseco, el triedro va siempre moviéndose con el punto, de forma que tendrá dos movimientos (traslación y rotación)

$$\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$$

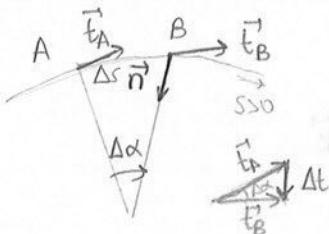
### ~ Vectores unitarios

• Vector tangente ( $\vec{t}$ )



$$\vec{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

• Vector normal ( $\vec{n}$ )



$$\vec{n} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta \alpha} = \frac{d\vec{t}}{d\alpha}$$

• Vector binormal ( $\vec{b}$ )

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

Curvatura de flexión

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$$

↓  
radio de curvatura de flexión

Curvatura de torsión

$$\left| \frac{1}{\tau} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \beta}{\Delta s} \right|$$

$\beta$ : ángulo que forman las binormales

Cartagena99

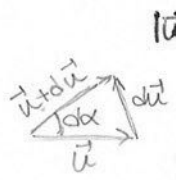
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

variable derivada de  $\vec{u}$   $\vec{u} = cte$

~ Derivada de un vector de módulo unidad



$|\vec{u}| = 1$

$\left| \frac{d\vec{u}}{ds} \right| = \frac{|d\vec{u}|}{ds} = \frac{|\vec{u}| d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}$

El módulo de la derivada es igual a la variación angular del vector respecto de la variable

Fórmulas de Frenet

$\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$

son funciones de la longitud de arco  $s$   
Esta referencia varía al pasar de un punto a otro

$\frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta \alpha} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \vec{n} \cdot \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$

$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{r}$

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds} \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{b}}{r} - \frac{\vec{t}}{\rho}$

Vector de Darboux

Movimiento de un triedro { Desplazamiento de su origen  
Giro alrededor de un eje que pase por el origen

Vector de DARBOUX  $\rightarrow$  representa el giro del triedro intrínseco

$\vec{\Omega} = \frac{1}{\rho} \vec{b} + \frac{1}{r} \vec{t}$  No existe giro en torno a la normal principal  
Este vector está contenido en el plano rectificante

• Relación Vector de Darboux - Fórmulas de Frenet

$\vec{\Omega} \times \vec{t} = \frac{d\vec{t}}{ds}$        $\vec{\Omega} \times \vec{n} = \frac{d\vec{n}}{ds}$        $\vec{\Omega} \times \vec{b} = \frac{d\vec{b}}{ds}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

5: Componentes intrínsecas de la velocidad y de la aceleración

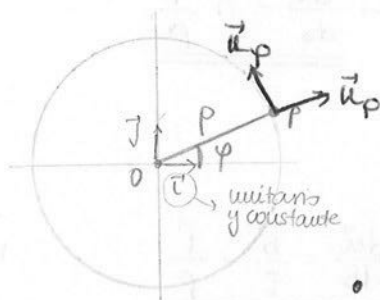
$$d\vec{r} = ds \vec{t} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{t} \rightarrow \boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{t}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \cdot \frac{d\vec{t}}{dt} = \boxed{\frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \vec{a}} \rightarrow \vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

6: Componentes polares de la velocidad y de la aceleración



$$\vec{u}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \text{sen} \varphi \vec{j}$$

$$\vec{u}_\varphi = -\text{sen} \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

$$d\vec{P} = \rho \cdot d\vec{u}_\rho$$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \overset{\text{derivada}}{\dot{\rho}} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi}$$

$$\vec{a}_\rho = \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} (-\text{sen} \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) = \dot{\varphi} \cdot \vec{u}_\varphi$$

derivada de  $\vec{u}_\rho$   
(no aparece la derivada de  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  porque son ctes.)

⇓

Derivar un vector unitario y constante significa obtener un vector también unitario y perpendicular a él pero de sentido arbitrario.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \overset{1^\circ \text{ término de } \vec{v}}{\dot{\rho} \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{u}_\rho}{dt}} + \overset{2^\circ \text{ término}}{\rho \cdot \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi + \rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{u}_\varphi + \rho \cdot \dot{\varphi} \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} (-\cos \varphi \vec{i} - \text{sen} \varphi \vec{j}) = -\dot{\varphi} \cdot \vec{u}_\rho$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{u}_\varphi}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

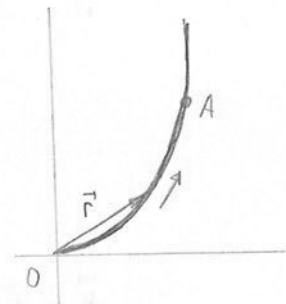
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ej. El eje de una parábola es el OY y la curva pasa por los puntos  $O(0,0)$  y  $A(R, \frac{3R}{4})$ . El vector binormal coincide con el 3er vector cartesiano. La curva se orienta positivamente según las abscisas crecientes. Hallar en función de  $x$  los vectores tangente y normal, vector arco elem. ( $d\vec{l}$ ) y arco elemental ( $dl$ )

$$y = ax^2 \rightarrow \frac{3R}{4} = aR^2 \rightarrow a = \frac{3}{4R} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{3}{4R} x^2}}$$



arco, equivalente a s de las fórmulas

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{d\vec{r}}{dx} \cdot \frac{dx}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{3x}{2R})^2}} (\vec{i} + \frac{3x}{2R} \vec{j})$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + \frac{3}{4R} x^2 \vec{j} = \vec{r}(x)$$

¿? ¿Cómo se calcula? ¿Por qué así?

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 (1 + (\frac{dy}{dx})^2)} = dx \sqrt{1 + (\frac{3x}{2R})^2} \rightarrow \frac{dx}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{3x}{2R})^2}}$$

↳ ¿No sería  $\frac{dy}{dx}$ ?

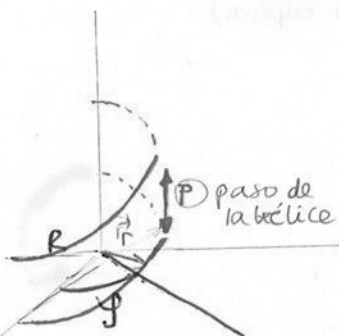
$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \vec{k} \times \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{3x}{2R})^2}} [\vec{j} + \frac{3x}{2R} (-\vec{i})]$$

(i, j, k)

$$\underline{\underline{d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} = dx \vec{i} + \frac{3x}{2R} dx \vec{j} = (\vec{i} + \frac{3x}{2R} \vec{j}) dx}}$$

$$\underline{\underline{dl = \sqrt{d\vec{l} \cdot d\vec{l}} = dx \sqrt{1 + (\frac{3x}{2R})^2}}}$$

Ej. Hélice en coordenadas paramétricas



$$x = R \cdot \cos y = R \cdot \cos(\omega t)$$

$$y = R \cdot \sin y = R \cdot \sin(\omega t)$$

$$z = p \cdot \frac{y}{2\pi} = p \cdot \frac{\omega t}{2\pi}$$

$$y = \omega t$$

→ vectores de posición, velocidad y aceleración

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = dv$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ si } v = dv \\ a_n = \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

→ Vectores tangente, normal y binormal

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (\vec{t} \text{ unitario})$$

$$\vec{n} \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad \rightarrow \quad \vec{u} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|} \quad \vec{n} \parallel \frac{d\vec{t}}{ds}$$

no aparece  $\rho$  porque es un escalar y solo estamos prestando atención al vector

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\vec{t}}{dt}$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\frac{d\vec{t}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{t}}{dt} \right|} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{t}}{dt} \right|}$$

→ Componentes intrínsecas de la aceleración

$$|\vec{a}|, a_n, a_t$$

$$a_t = 0 \quad \rightarrow \quad a_n = |\vec{a}|$$

$$a_t \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2} \\ a_t = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_n^2} \end{array} \right.$$

$$\vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{t} = a_t \quad \rightarrow \quad a_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

3. Estudio de algunos movimientos

Según la TRAYECTORIA  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rectilíneos} \\ \text{Curvilíneos} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Planos (circular, elíptico)} \\ \text{Alabeados} \end{array} \right.$

Según la relación "arco recorrido" y "tiempo"  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Uniformes} \\ \text{Variados} \end{array} \right.$

~ Rectilíneos

$$\text{Mov. uniforme (v=cte)} \quad \rightarrow \quad ds = v dt$$

$$s = s_0 + v(t-t_0)$$

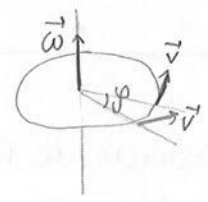
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

~ Curvilíneos Circular → la trayectoria descrita es una circunferencia



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

• Uniforme  $\omega = \text{cte} \Rightarrow \alpha = 0 \quad \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \omega^2 r \end{cases}$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t-t_0)$$

• Uniformemente variado

$$\alpha = \text{cte} \quad \begin{cases} a_t = \alpha R \\ a_n = \omega^2 R \end{cases}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t-t_0)$$

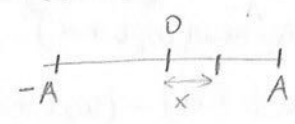
$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t-t_0) + \frac{1}{2} \alpha(t-t_0)^2$$

~ Movimiento armónico simple

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \cdot x$$

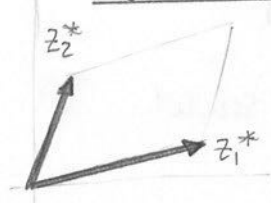


Relación MAS - circular uniforme: cuando un punto se mueve con mov. circular uniforme, su proyección realiza un MAS.

#### 4. Composición de movimientos

- Barquita (dos movs. rectilíneos uniformes)
- proyectil (un mov. rectilíneo unif. y otro mov. rectilíneo unif. variado)
- Movimientos armónicos:

~ Misma frecuencia, distinta fase



$$y = A \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$v = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = -A\omega^2 \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$y_1 = A_1 \text{sen}(\omega t + \alpha_1)$$

$$y_2 = A_2 \text{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

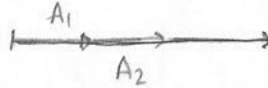
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\boxed{\delta = \alpha_1 - \alpha_2}$$

1°-  $\delta = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$  Movimiento en fase

$$A = A_1 + A_2$$



2°-  $\delta = \pi \rightarrow$  Mov. oposición de fase

$$A = A_1 - A_2 \quad A_1 > A_2$$

$$A = A_2 - A_1 \quad A_2 > A_1$$

$$\Rightarrow A = |A_1 - A_2|$$

3°-  $\delta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$  Mov. en cuadratura

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

~ Misma fase, distinta frecuencia

$$y_1 = A_1 \text{ sen}(\omega_1 t + \alpha)$$

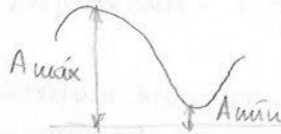
$$y_2 = A_2 \text{ sen}(\omega_2 t + \alpha)$$

$$\delta = (\omega_1 t + \alpha) - (\omega_2 t + \alpha) = (\omega_1 - \omega_2)t$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} = A(t)$$

$$A_{\text{máx}} \rightarrow A_1 + A_2$$

$$A_{\text{mín}} \rightarrow |A_1 - A_2|$$



$$\boxed{\omega_1 \approx \omega_2}$$

A pesar de ser distintas, los valores son muy próximos

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$A_1 = A_2 = A$  para facilitar cálculos  
 $\alpha = 0$

$$y = y_1 + y_2 = A (\text{sen } \omega_1 t + \text{sen } \omega_2 t)$$

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$y = 2A \left[ \text{sen} \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right]$$

$$y = \left[ 2A \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right] \cdot \text{sen } \omega t = A(t) \cdot \text{sen } \omega t$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

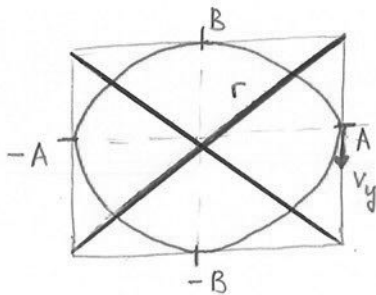


~ Bases perpendiculares

→ Frecuencias iguales

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t) \quad \begin{array}{l} \text{desviación, incluye ambas } \alpha \\ \downarrow \end{array}$$

$$y = B \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

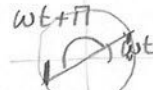


a)  $\boxed{\delta = 0}$

$$\left. \begin{array}{l} x = A \operatorname{sen}(\omega t) \\ y = B \operatorname{sen}(\omega t) \end{array} \right\} \frac{x}{A} = \frac{y}{B} \rightarrow y = \frac{B}{A} x$$

Ec. de una recta con pendiente positiva —

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(\omega t)$$

b)  $\boxed{\delta = \pi}$   $\left\{ \begin{array}{l} x = A \operatorname{sen} \omega t \\ y = B \operatorname{sen}(\omega t + \pi) = -B \operatorname{sen}(\omega t) \end{array} \right.$  

$$\frac{x}{A} = -\frac{y}{B} \rightarrow y = -\frac{B}{A} x \quad \text{Ec. de una recta con pendiente negativa}$$

El punto se mueve según la otra diagonal —

c)  $\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$   $\left\{ \begin{array}{l} x = A \operatorname{sen}(\omega t) \\ y = B \operatorname{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2}) = B \cos \omega t \end{array} \right.$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Ec. de una elipse —

Ahora, vamos a ver la dirección que sigue el punto:

$$x = A \quad \operatorname{sen} \omega t = 1$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -B \omega \operatorname{sen} \omega t \xrightarrow{\text{Aplicado en A}} v_{yA} = -B \omega \Rightarrow \text{Sentido horario}$$

→ Frecuencias distintas FIGURAS DE LISSAJOUS



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a yellow-bordered box.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# TEMA 4: Cinemática del punto (RESUMEN)

T-4

Velocidad:

Media  $\rightarrow \vec{v}_{m} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Instantánea  $\rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$

Aceleración:

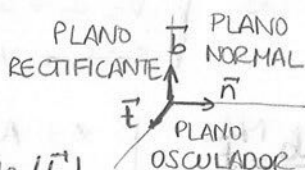
Media  $\rightarrow \vec{a}_{m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Instantánea  $\rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$

Función espacio:

Velocidad  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Escalar: } v = \vec{v} \cdot \vec{t} \\ \text{Vector: } \vec{v} = (v \cdot \vec{t}) \cdot \vec{t} \end{array} \right\} ds = v \cdot dt$

o Triedro intrínseco



Vectores unitarios  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tangente } (\vec{t}) \\ \text{Normal } (\vec{n}) \\ \text{Binormal } (\vec{b}) \end{array} \right.$

$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} \quad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} ; \vec{a} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

Curvaturas: Flexión  $\rightarrow \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \frac{d\alpha}{ds}$

Torsión  $\rightarrow \left| \frac{1}{\tau} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \beta}{\Delta s} \right| = \frac{d\beta}{ds}$   $\beta$ : ángulo que forman las binormales

Fórmulas de Frenet:  $\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{n} \cdot \frac{1}{\rho} \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{\rho} - \vec{b} \cdot \frac{1}{\tau} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{t} \cdot \frac{1}{\tau}$

Vector de Darboux:  $\vec{\Omega} = \frac{1}{\rho} \vec{b} + \frac{1}{\tau} \vec{t}$

Relación fórmulas de Frenet - vector de Darboux

$\vec{\Omega} \times \vec{t} = \frac{d\vec{t}}{ds} \quad \vec{\Omega} \times \vec{n} = \frac{d\vec{n}}{ds} \quad \vec{\Omega} \times \vec{b} = \frac{d\vec{b}}{ds}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

rares  $u_p = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$

## Hélice en coordenadas paramétricas

$$x = R \cos y = R \cos(\omega t)$$

$$y = R \operatorname{sen} y = R \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$z = \underbrace{P}_{\text{paso de hélice}} \cdot \frac{y}{2\pi} = P \frac{\omega t}{2\pi}$$

$$\vec{r} = R \cos(\omega t) \vec{i} + R \operatorname{sen}(\omega t) \vec{j} + P \frac{\omega t}{2\pi} \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega \operatorname{sen}(\omega t) \vec{i} + R\omega \cos(\omega t) \vec{j} + \frac{P\omega}{2\pi} \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2 \cos(\omega t) \vec{i} + R\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) \vec{j}$$

$$\hookrightarrow \vec{a} = -R\omega^2 [\cos(\omega t) \vec{i} + \operatorname{sen}(\omega t) \vec{j}]$$

## o. Movimientos

RECTILÍNEOS  
( $a_n = 0$ )

- M.R.U  $\rightarrow a_t = 0 \Rightarrow \vec{v} = cte \quad \left\{ \begin{array}{l} ds = v dt \\ s = s_0 + v(t-t_0) \end{array} \right.$

- M.R.U.A  $\rightarrow a_t \neq 0$   
 $a = cte \quad \left\{ \begin{array}{l} dv = a dt \\ v = v_0 + a(t-t_0) \\ s = s_0 + v(t-t_0) + \frac{1}{2} a(t-t_0)^2 \end{array} \right.$

- MR Variado  $\rightsquigarrow$  MAS  $\left\{ \begin{array}{l} x = A \cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \\ a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \end{array} \right.$

CURVILÍNEOS  
( $a_n \neq 0$ )

- M.C.U  $\rightarrow \rho = cte$   
 $a_t = 0 \Rightarrow \omega = cte \rightarrow \alpha = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_t = 0 \\ a_n = \omega^2 \rho \end{array} \right.$   
 $\varphi = \varphi_0 + \omega(t-t_0)$

- M.C.U.A  $\rightarrow \rho = cte$   
 $a_t \neq 0 = cte \Rightarrow \alpha = cte \quad \left\{ \begin{array}{l} a_t = \alpha \rho \\ a_n = \omega^2 \rho \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha(t-t_0) \\ \varphi = \varphi_0 + \omega(t-t_0) + \frac{1}{2} \alpha(t-t_0)^2 \end{array} \right.$

- MC  $\rightsquigarrow$  Projectil (Tiro parabólico)

$\hookrightarrow$  Eje x: MRU  $\rightarrow x = x_0 + v(t-t_0)$   
Eje y: MRUA  $\rightarrow y = y_0 + v(t-t_0) + \frac{1}{2} a(t-t_0)^2$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# CINEMÁTICA DE LOS SISTEMAS

## 1. Sistema indeformable

Sistema indeformable  $\rightarrow$  la distancia entre los puntos que lo forman permanece constante en el transcurso del tiempo

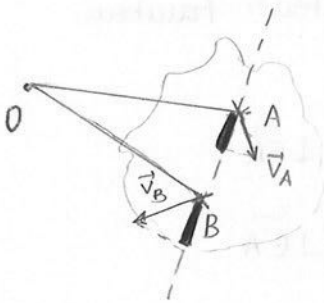
$$A, B \quad \frac{d}{dt} \text{ nor } \vec{AB} = 0$$

queda perfectamente definido cuando conocemos tres puntos de él que no estén alineados.

$\sim$  Sistema discreto

$\sim$  Sistema continuo  $\rightarrow$  SÓLIDO RÍGIDO

## 2. Teorema de las velocidades proyectadas



$$\frac{d}{dt} \text{ nor } \vec{AB} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{AB} \cdot \vec{AB}) = 2\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{AB} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{AB} \cdot \frac{d\vec{OB}}{dt} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{v}_A = \vec{AB} \cdot \vec{v}_B$$

O: punto exterior

$$|\vec{AB}| \text{ projec}_{AB} \vec{v}_A = |\vec{AB}| \text{ projec}_{AB} \vec{v}_B = \text{cte}$$

La proyección de la velocidad en la línea que une los puntos es la misma.

## 3. Movimiento de traslación

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

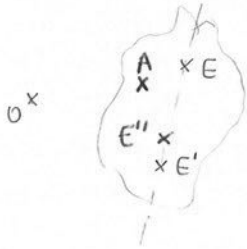
Vectores  $\vec{v}_A = \vec{v}_B$

Un sistema diremos que tiene un movimiento de traslación cuando las trayectorias y las velocidades sean las mismas en un instante determinado.

#### 4. Movimiento de rotación

Un sistema indeformable realiza un mov. de rotación cuando se mantienen fijos dos puntos del sistema.

$$E, E' \text{ fijos} \rightarrow \vec{v}_E = \vec{v}_{E'} = 0 \quad \forall t$$



$$\frac{d\vec{OE}}{dt} = \frac{d\vec{OE}'}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{OE}' - \vec{OE}) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{EE}'}{dt} = 0$$

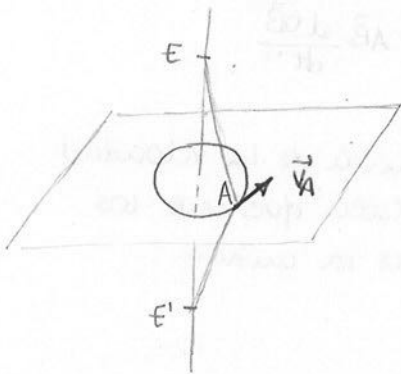
$$\underline{E''} \quad \vec{EE''} = \lambda \vec{EE'}$$

$$\frac{d\vec{EE''}}{dt} = \lambda \frac{d\vec{EE'}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{EE''}}{dt} = 0 \quad \vec{v}_{E''} = 0$$

Todos los puntos que pertenecen a la recta EE' van a tener también velocidad nula

$$\underline{A} \quad \frac{d}{dt} \text{cor } \vec{EA} = 0 \rightarrow 2\vec{EA} \cdot \frac{d\vec{EA}}{dt} = 0 \quad \vec{EA} \cdot \vec{v}_A = 0 \rightarrow \vec{v}_A \perp \vec{EA}$$

$$\frac{d}{dt} \text{cor } \vec{E'A} = 0 \rightarrow 2\vec{E'A} \cdot \frac{d\vec{E'A}}{dt} = 0 \quad \vec{E'A} \cdot \vec{v}_A = 0 \rightarrow \vec{v}_A \perp \vec{E'A}$$



Todos los puntos que no estén en la recta que une E con E', van a describir una trayectoria circular

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}, \vec{\omega}) > 0 \rightarrow (\vec{r}, d\vec{r}, \vec{\omega}) > 0$$

$$(\vec{\omega}, \vec{r}, \vec{v}) > 0 \rightarrow (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} > 0$$

$\vec{\omega} \times \vec{r} \parallel \vec{v}$  y de igual sentido

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$dr = \rho d\theta \rightarrow v = \frac{dr}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho \omega$$

$$v = r \omega \text{ sen } \beta \rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

↓

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \vec{\omega} \times \vec{OA}$$

$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB} \rightarrow$  En un sistema indeformable, todos los puntos tienen la misma velocidad angular.

$$\vec{v}_A = \vec{OA} \times \vec{\omega} = \vec{M}_A(\vec{\omega})$$

A  $(\vec{\omega}, \vec{v}_A)$  en un instante t  
GRUPO CINEMÁTICO

→ Aceleración angular ( $\vec{\alpha}$ )

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} \rightarrow \vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

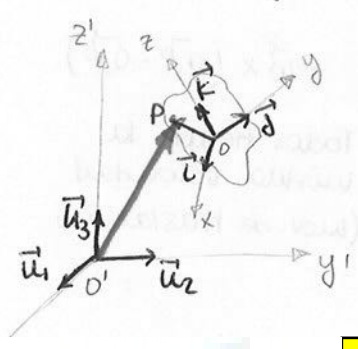
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$a_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$a_u = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

### 5. Campo de velocidades y aceleraciones en el movimiento general de un sistema



$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{OP}| = cte \rightarrow x, y, z = ctes.$$

$$\vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$$

$$\frac{d\vec{O'P}}{dt} = \frac{d\vec{O'O}}{dt} + \frac{d\vec{OP}}{dt} \rightarrow \vec{v}_{P/O'} = \vec{v}_{O'/O} + \left( x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$$

módulo constante



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

El punto O' que utilizamos puede variar, pues cogiendo otro punto O''

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} \rightarrow \vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \vec{a}_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{OP}}{dt}$$

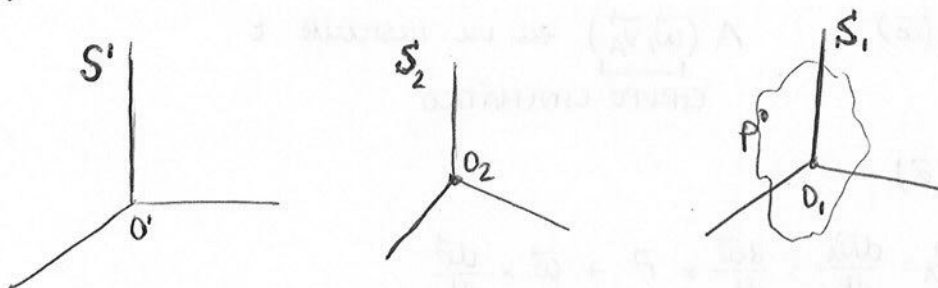
$$\boxed{\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{OP}}_{a_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{a_n}}$$

## 6. Movimiento relativo de un sólido rígido

El movimiento relativo es el movimiento que realiza el sistema  $S_1$  respecto al  $S_2$  ( $\vec{v}_{O_1}, \vec{\omega}_1$ ).

El mov. de arrastre es el que realiza el sistema  $S_2$  con respecto al  $S'$  ( $\vec{v}_{O_2}, \vec{\omega}_2$ ).

El mov. absoluto es el que realiza el sistema  $S_1$  con respecto a  $S'$ .



$$\vec{v}_P = \vec{v}_{relat.} + \vec{v}_{arrastre} \rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{O_1P} + \vec{v}_{O_2} + \vec{\omega}_2 \times \vec{O_2P}$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \sum \vec{v}_{O_i} + \sum \vec{\omega}_i \times \vec{O_iP}}$$

→ No hay velocidad de traslación y tenemos un par de vectores:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{O_1} = \vec{v}_{O_2} = \vec{0} \\ \vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2 = \vec{\omega} \end{array} \right\} \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{O_1P} - \vec{\omega} \times \vec{O_2P} = \vec{\omega} \times (\vec{O_1P} - \vec{O_2P})$$

$$\underline{\underline{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{O_1O_2}}}$$

Todos tienen la misma velocidad (mov. de traslación)

Un par de rotaciones equivale a una traslación

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

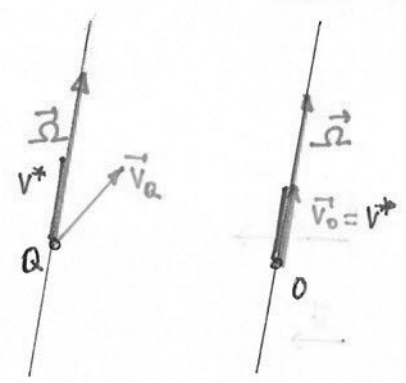
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

en un instante



Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo (Eje central)



$$\vec{v}_0 = \vec{v}_Q + \vec{OQ} \times \vec{\Omega} = \vec{v}_Q + \vec{\Omega} \times \vec{OQ}$$

$$0 \in \mathbb{EIR} \quad \vec{v}_0 \parallel \vec{\Omega} \implies \vec{v}_Q + \vec{OQ} \times \vec{\Omega} = \lambda \vec{\Omega}$$

$$(1^\circ) \vec{i} + (2^\circ) \vec{j} + (3^\circ) \vec{k} = \lambda (\Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k})$$

$$\Downarrow$$

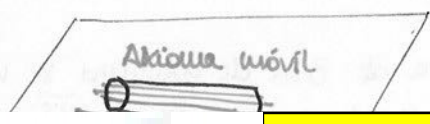
$$\frac{(1^\circ)}{-\Omega_x} = \frac{(2^\circ)}{-\Omega_y} = \frac{(3^\circ)}{-\Omega_z}$$

$$O\vec{P} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{v}_P}{\text{nor } \vec{\Omega}} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \implies \frac{x-x_0}{-\Omega_x} = \frac{y-y_0}{-\Omega_y} = \frac{z-z_0}{-\Omega_z}$$

Todo esto es para un instante. Para hallarlo para cualquier instante, hay que ir calculando los distintos EIR, que forman una superficie que recibe el nombre de axoide.

Existen dos tipos de axoides, los fijos y los móviles, que son perpendiculares entre sí y la recta tangente a ambos axoides es el EIR.

El centro instantáneo de rotación es el punto en el que el vector velocidad es perpendicular al plano. Por ello, va cambiando de posición en cada instante describiendo una curva. Si dicha curva la ve un observador móvil se llama ruleta y, si el observador fijo, se llama base. Estamos en el plano de dos dimensiones.



La velocidad de los punto situados en

**Cartagena99**

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

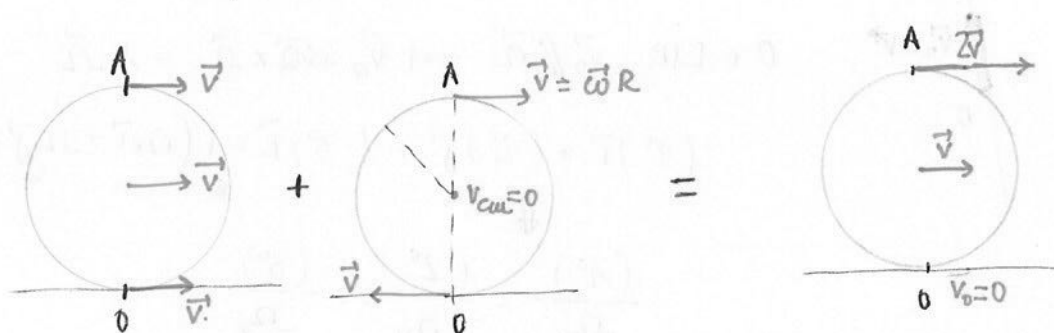
---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

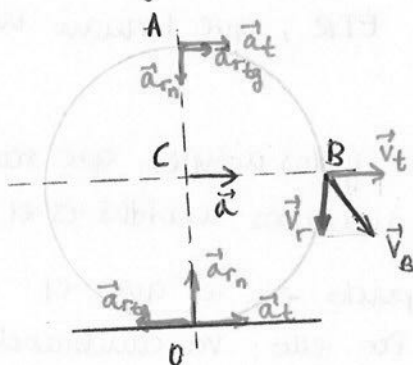
## Movimiento de rodadura o rodamiento

Ocurre cuando un cuerpo rueda pero no desliza

RODADURA } Traslación -  
                  } Rotación -



Ej. Una bola de radio  $R$  rueda sin deslizar por un plano horizontal de manera que su centro se mueve con aceleración constante  $a$ . Al cabo de un cierto tiempo de iniciado el mov. su posición es como indica la figura. Hallar la velocidad de los pts. A y B y la aceleración en los pts. A y O.



$$v_c = at$$

$$v_A = 2v_c = 2at$$

$$v_B = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = \sqrt{(at)^2 + (at)^2} = \sqrt{2} at$$

$$a_A = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{dv_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v_r^2}{R}\right)^2} = \sqrt{2a^2 + \left(\frac{a^2 t^2}{R}\right)^2}$$

$$a_o = \frac{v_r^2}{R} = \frac{a^2 t^2}{R}$$

Ej. En un instante determinado, una barra de 3m de longitud se mueve en un plano horizontal...

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

**Cartagena99**

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{PP}' \times \vec{\omega} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix}$$

$$\vec{PP}' = (L, 0, 0)$$

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + (-L\omega) \rightarrow 3\omega = -\frac{\sqrt{2}}{L}(\sqrt{3}+1)$$

$$\omega = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{6} \text{ rad/s}$$

$$\vec{v} = \vec{v}'_A + \vec{PQ} \times \vec{\omega} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -b & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = -b\omega\vec{i} - a\omega\vec{j} + 0\vec{k}$$

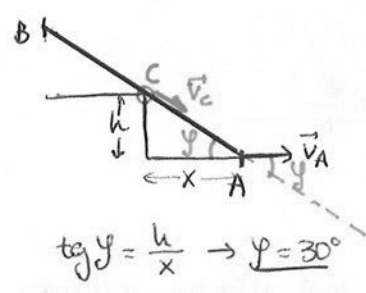
$$\vec{v}' = \vec{v}'_A + \vec{P'Q} \times \vec{\omega}$$

$$\vec{PQ} = (a, -b, 0)$$

$$\vec{P'Q} = (-(L-a), -b, 0)$$

$$b = -\frac{\sqrt{2}}{2\omega} = \frac{-\sqrt{2} \cdot 6}{-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{3}{\sqrt{3}+1} = a$$

Ej. Una barra de 3m de longitud resbala por el suelo apoyándose en un escalón donde  $x = \sqrt{3}m$  y  $h = 1m$ . El pto. A tiene  $v_A = 1m/s$ . Calcular  $\vec{v}_B$  y  $\vec{\omega}$ .



$$v_A = 1m/s \rightarrow v_C = v_A \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} m/s$$

$$L = 3m$$

$$x = \sqrt{3}m$$

$$h = 1m$$

$$\vec{v}_C = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 30^\circ \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 30^\circ \vec{j}$$

$$\vec{v}_A = \vec{i}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{CA} \times \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{1}{4} \vec{k}$$

$$\vec{CA} = (x, -h, 0)$$

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{BA} \times \vec{\omega} \Rightarrow \vec{v}_B = \frac{5}{8} \vec{i} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \vec{j}$$

$$\vec{BA} = (L \cos \phi, -L \sin \phi, 0)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\vec{AB} \cdot \vec{v}_A = \vec{AB} \cdot \vec{v}_B \rightarrow (-1, 1, 0) \cdot (1, 0, 0) = (-1, 1, 0) \cdot (0, 0, 0)$$

c) Conocidas  $\vec{v}_A = \vec{i}$ ,  $\vec{v}_B = -\vec{j}$  y  $\vec{v}_C = \vec{k}$  siendo  $C = (1, 1, 0)$ , calcular la expresión del vector velocidad angular.

$$\vec{\omega} = (x, y, z) \Rightarrow \underline{\underline{\vec{\omega} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{BA} \rightarrow \vec{i} = -\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{i} = -\vec{j} + z\vec{i} + z\vec{j} - (x+y)\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{i}: 1 = z \\ \vec{j}: 0 = -1 + z \\ \vec{k}: x + y = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{z = 1}} \\ x + y = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CA} \rightarrow \vec{i} = \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{i} = \vec{k} + z\vec{i} + 0\vec{j} - x\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{i}: z = 1 \checkmark \\ \vec{j}: 0 = 0 \checkmark \\ \vec{k}: 1 - x = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{x = 1}} \\ (x + y = 0) \rightarrow \underline{\underline{y = -1}} \end{array} \right.$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CB} \rightarrow -\vec{j} = \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow -\vec{j} = \vec{k} + 0\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{i}: 0 = 0 \checkmark \\ \vec{j}: -1 = -z \checkmark \\ \vec{k}: 1 + y = 0 \end{cases} \left\{ \underline{\underline{y = -1}} \right.$$

d) Ecuaciones que determinan el EIR

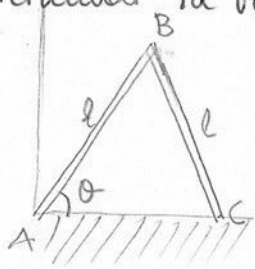
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} = (-z - y - 2)\vec{i} + (-z + x + 2)\vec{j} + (y + x + 4)\vec{k} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{-y - z - 2 = \frac{x - z + 2}{-1} = \frac{x + y + 4}{1}}} \end{array} \right.$$

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \vec{OB} + \vec{\omega} \times \vec{OC} = -z\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

e) Expresión vectorial del módulo deslizamiento

$$\vec{OP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega \|\vec{\omega}\|} = \frac{-6\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}}{3} = \underline{\underline{-2\vec{i} - 2\vec{j}}}$$

Ej. Dos barras de 1 m de longitud están unidas en B por una bisagra, estando apoyadas en el suelo. El extremo A es un punto fijo. Se deja el sistema en libertad cuando el ángulo  $\theta$  forma  $20^\circ$  con la horizontal. Si  $\omega_{AB} = 0,2 \text{ rad/s}$ , determinar la velocidad del extremo C de la barra BC.



$$\begin{aligned} \theta &= 20^\circ \\ \omega &= 0,2 \text{ rad/s} \\ v_C &? \end{aligned}$$

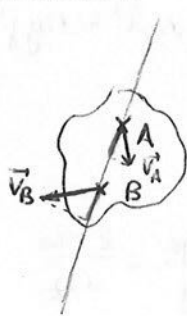
$$AB: \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ l \cos \theta & l \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = +\omega l \sin \theta \vec{i} - \omega l \cos \theta \vec{j}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistema INDEFORMABLE: la distancia entre los puntos que lo forman permanece constante en el transcurso del tiempo. Queda perfectamente definido con tres puntos no alineados.



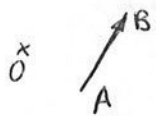
$$A, B \quad \frac{d}{dt} \text{mod} \overline{AB} = 0 \quad \forall t$$

$$\downarrow$$

$$\overline{AB} \cdot \vec{v}_A = \overline{AB} \cdot \vec{v}_B \Rightarrow \text{Proyec}_{\overline{AB}} \vec{v}_A = \text{Proyec}_{\overline{AB}} \vec{v}_B = \text{cte}$$

La proyección de la velocidad en la línea que une los puntos es la misma (TEOREMA de las VELOCIDADES PROYECTADAS)

~ Movimiento de TRASLACIÓN



Dados dos puntos A y B cualesquiera en un instante, la derivada del vector que los une es cero.

$$A, B \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{OA}}{dt} = \frac{d\vec{OB}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B \rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

~ Movimiento de ROTACIÓN



Se mantienen fijos dos puntos del sistema

$$E, E' \text{ fijos} \rightarrow \vec{v}_E = \vec{v}_{E'} = 0 \quad \forall t$$

E'': Todos los puntos que pertenecen a la recta EE' van a tener también velocidad nula

A: Todos los puntos que no estén en la recta EE' van a describir una trayectoria circular

→ Velocidad angular:  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

→ Aceleración angular:  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \begin{matrix} a_t = \alpha \times r \\ a_n = \omega \times (\omega \times r) \end{matrix}$$

En el movimiento general de un sistema:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$a_p = a_0 + \alpha' \times r' + \omega' \times (\omega' \times r')$$



Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo  $\rightarrow$  EIR

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_Q + \vec{OQ} \times \vec{\Omega} \rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_Q + \vec{\Omega} \times \vec{OQ}$$

•  $O \in \text{EIR} \quad \vec{v}_0 \parallel \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_Q + \vec{\Omega} \times \vec{OQ} = \lambda \vec{\Omega}$

$$(1^\circ) \vec{i} + (2^\circ) \vec{j} + (3^\circ) \vec{k} = \lambda (\Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k})$$

$$\frac{1^\circ}{\Omega_x} = \frac{2^\circ}{\Omega_y} = \frac{3^\circ}{\Omega_z}$$

•  $\vec{OQ} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{v}_Q}{\text{nor } \vec{\Omega}} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \Rightarrow \frac{x-x_0}{\Omega_x} = \frac{y-y_0}{\Omega_y} = \frac{z-z_0}{\Omega_z}$

Centro instantáneo de rotación  $\rightarrow$  CIR

Punto en el que el vector velocidad es perpendicular al plano

Cartagena99

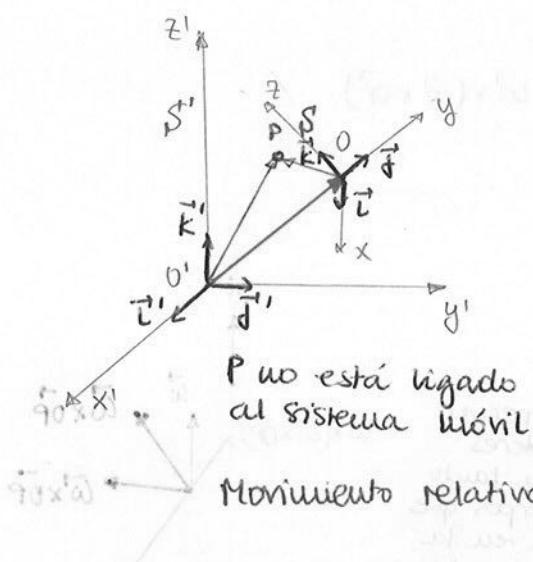
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# TG - CINEMÁTICA RELATIVA DEL PUNTO

## 1. Definiciones de movimientos relativos, de arrastre y absolutos - Composición de velocidad de arrastre y absoluta



$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{OP} = \vec{O'O} + \vec{O'P}$$

$$\vec{v}_{P/S'} = \vec{v}_{O/S'} + \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{v}_{O/S'} + (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + x(\vec{\omega} \times \vec{i}) + y(\vec{\omega} \times \vec{j}) + z(\vec{\omega} \times \vec{k})$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}$$

$$\vec{v}_{P/S'} = \underbrace{\vec{v}_{O/S'}}_{\text{Vabsoluta}} + \underbrace{\vec{v}_{P/S'}}_{\text{Vrelativa}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OP}}_{\text{Varrastre}}$$

P no está ligado al sistema móvil

Movimiento relativo de P → mov. que tiene P respecto al sistema móvil S'

Movimiento de arrastre de P → mov. que tiene el sistema móvil S' respecto al sistema fijo S'

Movimiento absoluto de P → mov. que tiene P respecto al sist. fijo (S'), que resulta ser la suma de los movimientos relativo y de arrastre.

## 2. Composición de aceleración: aceleraciones relativa, de arrastre, de Coriolis y absoluta

$$\vec{a}_{P/S'} = \vec{a}_{O/S'} + (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) + [x(\ddot{\omega} \times \vec{i}) + y(\ddot{\omega} \times \vec{j}) + z(\ddot{\omega} \times \vec{k})] + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\vec{a}_{P/S'} = \vec{a}_{O/S'} + \vec{a}_{P/S'} + (\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S'}) + \vec{\alpha} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times [(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + (x(\ddot{\omega} \times \vec{i}) + y(\ddot{\omega} \times \vec{j}) + z(\ddot{\omega} \times \vec{k}))]$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

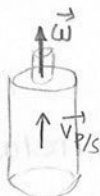
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$a_{abs}$     $a_{rel}$     $a_{arrastre}$     $a_{coriolis}$     $v_{P/S'}$

Condiciones para la anulación de una o varias componentes de la aceleración

$\bullet -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S} = 0 \rightarrow \vec{\omega} \parallel \vec{v}_{P/S}$

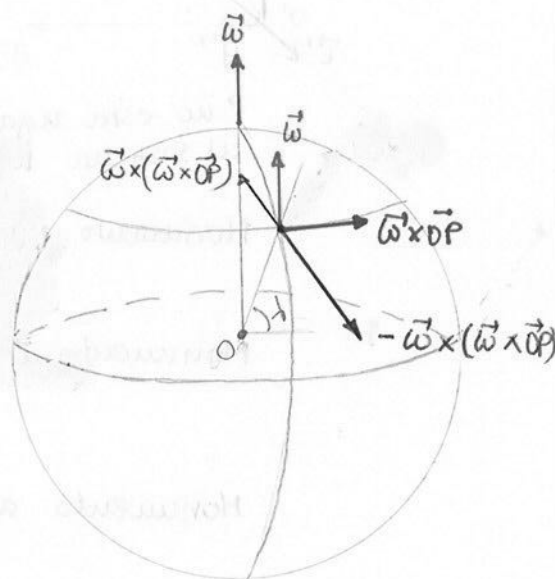
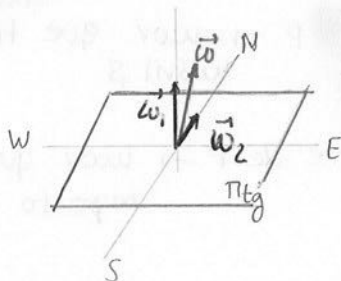
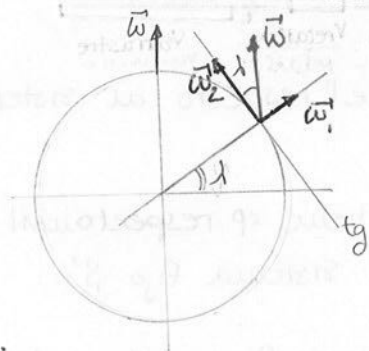
Solo afecta a observadores que se mueven con el sistema móvil



$\bullet \omega = \text{cte} \rightarrow \vec{a} \times \vec{OP} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{\text{arrastre}} = \vec{a}_{P/S} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$   
 $\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

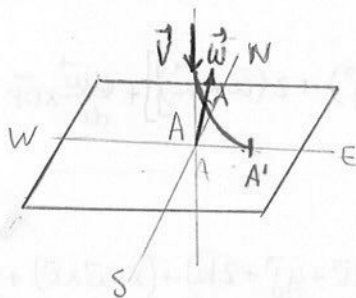
$|\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} = \text{cte.}$   
 (Tierra)

$\vec{a}_{P/S} = \vec{g}_0 - \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{a_{\text{centrífuga}}} - \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S}}_{a_{\text{Coriolis}}}$



$\bullet -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S} \rightarrow$  La aceleración de Coriolis tiene especial interés porque afecta tanto a cuerpos que caen en la tierra como a los que se desplazan.

a) CAIDA



$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & -v \end{vmatrix} = -v\omega_2 \vec{i}$

$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v} = +v\omega_2 \vec{i} \Rightarrow$  Afecta a cuerpos que caen en la Tierra



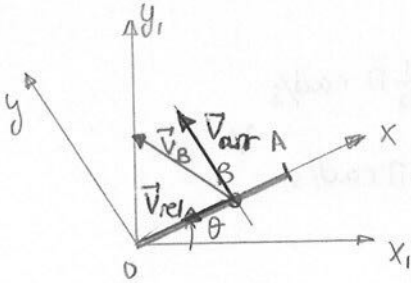
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Ej. Un brazo DA de longitud 1m gira en sentido antihorario alrededor de un brazo perpendicular, estando definido  $\theta = 0,13t^2$  siendo  $\theta$  el ángulo expresado en radianes que forma DA con la horizontal y  $t$  expresado en segundos. A lo largo del brazo se mueve un pto. B de tal forma que la distancia  $\vec{OB} = 1 - 0,13t^2$ . Calcular la velocidad y la aceleración del pto. B en el instante en el que el ángulo vale  $30^\circ$ .



$$\theta = 0,13t^2 \quad \theta = 30^\circ = \pi/6 \text{ rad} \rightarrow \frac{\pi}{6} = 0,13t^2 \Rightarrow t = \underline{1,868s}$$

$$\vec{OB} = 1 - 0,13t^2$$

$$\vec{v}_B, \vec{a}_B?$$

$$\vec{v}_{rel B} = \frac{d\vec{OB}}{dt} = -0,26t \vec{i}$$

$$\vec{v}_{arr B} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OB} = 0,3t \vec{k} \times (1 - 0,13t^2) \vec{i} = 0,3t(1 - 0,13t^2) \vec{j}$$

Solo gira, no se desplaza

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 0,3t \quad \vec{OB} = (1 - 0,13t^2) \vec{i}$$

$$\vec{\omega} = 0,3t \vec{k}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{abs B} = \vec{v}_{rel B} + \vec{v}_{arr B} = -0,26t \vec{i} + 0,3t(1 - 0,13t^2) \vec{j} = \underline{-0,486 \vec{i} + 0,306 \vec{j} \text{ m/s}}$$

↳ con respecto al sistema móvil

Para cambiarlo al otro sistema, al fijo:

$$\vec{i} = \cos\theta \vec{i}_1 + \text{sen}\theta \vec{j}_1$$

$$\vec{j} = -\text{sen}\theta \vec{i}_1 + \cos\theta \vec{j}_1$$

$$\vec{k} = \vec{k}_1$$

$$\vec{a}_{rel B} = \frac{d^2\vec{OB}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_{rel B}}{dt} = -0,26 \vec{i}$$

$$\vec{a}_{arr B} = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{OB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OB}) = 0,3 \vec{k} \times (1 - 0,13t^2) \vec{i} + 0,3t \vec{k} \times (0,3t \vec{k} \times (1 - 0,13t^2) \vec{i})$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0,3 \vec{k}$$

⇒

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

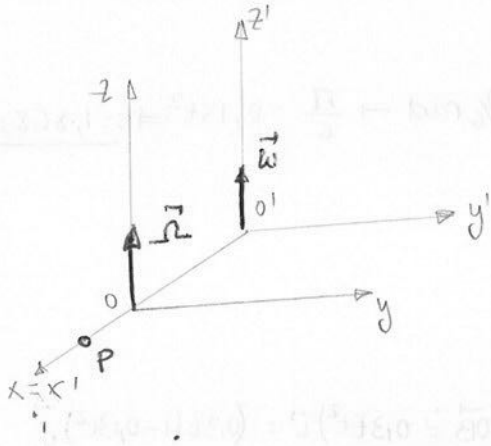
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\vec{v}_B = -0,432 \vec{i} + 0,32 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

Cartagena99

Ej: Un helicóptero da vueltas en un plano horizontal alrededor de una torre siguiendo un mov. circular uniforme de 50 m de radio a razón de 6 vueltas por minuto. Las aspas del helicóptero giran también con velocidad de 10 rps siendo la longitud de cada aspa de 1 m. Calcular la velocidad y la aceleración del extremo de un aspa primero para un observador situado en el interior del helicóptero y segundo para uno en la torre.



$$|\vec{O}^1\vec{O}| = 50 \text{ m}$$

$$\omega = 6 \text{ vueltas/min} = \frac{6 \cdot 2\pi}{60} = \frac{1}{5} \pi \text{ rad/s}$$

$$\Omega = 10 \text{ rps} = 10 \cdot 2\pi = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$|\vec{O}^1\vec{P}| = 1 \text{ m}$$

$$\vec{v}_P, \vec{a}_P?$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{\Omega} \times \vec{O}^1\vec{P} = |\vec{\Omega}| |\vec{O}^1\vec{P}| (\vec{k} \times \vec{i}) = \underline{20\pi \vec{j} \text{ m/s}} = \vec{v}_{P/S} \text{ observador en el interior}$$

$$\vec{v}_{arr} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{O}^1\vec{P} = \vec{\omega} \times \vec{O}^1\vec{O} + \vec{\omega} \times \vec{O}^1\vec{P} = \vec{\omega} \times \vec{O}^1\vec{P} = |\vec{\omega}| |\vec{O}^1\vec{P}| (\vec{k} \times \vec{i}) = \underline{\frac{1}{5} \pi \vec{j} \text{ m/s}}$$

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr} = 20\pi \vec{j} + \frac{1}{5} \pi \vec{j} = \underline{\frac{151}{5} \pi \vec{j} \text{ m/s}} = \vec{v}_{P/S} \text{ torre}$$

$$\vec{a}_{rel} = \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{O}^1\vec{P} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{O}^1\vec{P}}{dt} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{O}^1\vec{P}) = |\vec{\Omega}|^2 |\vec{O}^1\vec{P}| (-\vec{i}) = \underline{-400\pi^2 \vec{i} \text{ m/s}^2} = \vec{a}_{P/S}$$

Varía direc. y sentido

$\vec{k} \times \vec{j} \rightarrow -\vec{i}$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{coriolis} = -\vec{i} (400\pi^2 + \frac{1}{25} \pi^2 + 8\pi^2) = \underline{-410,04 \pi^2 \vec{i} = \vec{a}_{P/S}}$$

$$\vec{a}_{arr} = \vec{a}_0 + \vec{\alpha} \times \vec{O}^1\vec{P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}^1\vec{P}) = -|\vec{\omega}|^2 |\vec{O}^1\vec{O}| \vec{i} - |\vec{\omega}|^2 |\vec{O}^1\vec{P}| \vec{i} = \underline{-\frac{1}{25} \pi^2 \vec{i} \text{ m/s}^2}$$

$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$  ( $\vec{\omega} = \text{cte}$ )

$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{O}^1\vec{O}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O}^1\vec{O} + \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{O}^1\vec{O}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}^1\vec{O})$$

$\vec{k} \times \vec{j} \rightarrow -\vec{i}$

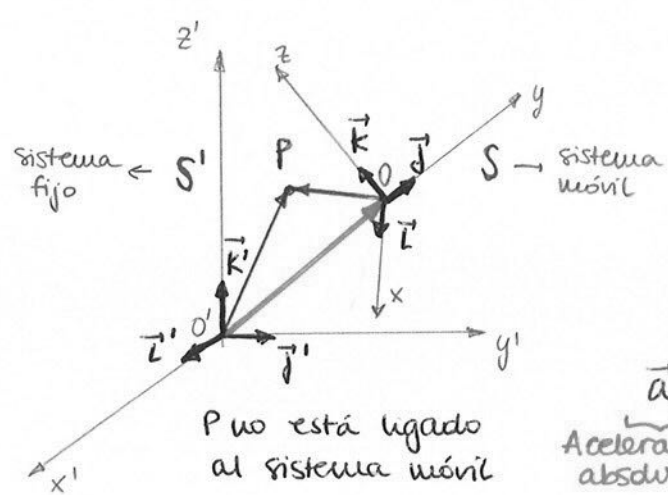
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# TEMA 6 : Cinemática relativa del punto (RESUMEN)



$$\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v}_{P/S'} = \underbrace{\vec{v}_{O/S'}}_{\text{Velocidad absoluta}} + \underbrace{\vec{v}_{P/S}}_{\text{Velocidad relativa}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OP}}_{\text{Velocidad de arrastre}}$$

$$\vec{a}_{P/S'} = \underbrace{\vec{a}_{P/S}}_{\text{Aceleración absoluta}} + \underbrace{\vec{a}_{O/S'}}_{\text{Aceleración relativa}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OP}}_{\text{Aceleración de arrastre}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S}}_{\text{Aceleración de Coriolis}}$$

- Movimiento relativo de P: mov. que tiene P respecto al sistema móvil S
- Movimiento de arrastre de P: mov. que tiene el sistema móvil S respecto al sistema fijo S'
- Movimiento absoluto de P: mov. que tiene P respecto al sistema fijo S'



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Faint, illegible text at the top of the page, possibly bleed-through from the reverse side.

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$(x + 5)(x + 2) = 0$$



Faint, illegible text in the middle section of the page, likely bleed-through from the reverse side.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

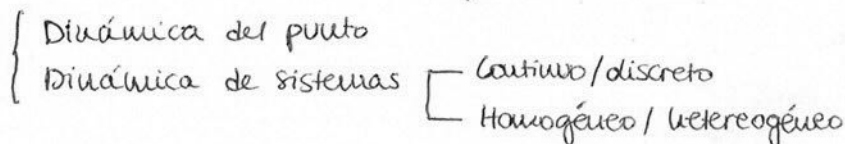
---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# T7- DINÁMICA DEL PUNTO

## 1. Objetivo de la Dinámica. Leyes de Newton

Dinámica → estudia el movimiento de los cuerpos y las causas que lo provocan. Con ello, aparecen los sistemas de referencia



~ Leyes de Newton

### 1ª LEY → Principio de inercia

Un cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme si no actúa ninguna fuerza sobre él o si la resultante de todas ellas es nula (sistemas inerciales)

### 2ª LEY → Ley Fundamental de la Dinámica

Si sobre un punto material o un cuerpo rígido actúa una fuerza resultante  $\vec{F}$ , este adquiere una aceleración que es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a su masa.

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

$\vec{F} \parallel \vec{a}$ , misma dirección y sentido

$m$ : masa inerte, que representa la oposición que opone el cuerpo al movimiento, y que siempre es constante

$F$ : fuerza motriz, que provoca movimiento

### 3ª LEY → Principio de acción y reacción

Si un cuerpo ejerce una fuerza (acción) sobre otro cuerpo, este a su vez ejerce sobre el primero una fuerza (reacción) con el mismo módulo y dirección, pero de sentido contrario. Ambas fuerzas se producen simultáneamente.



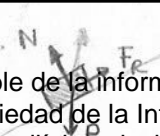
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

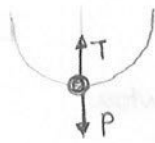
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Peso: interacción cuerpo - Tierra

Normal: interacción cuerpo - superficie

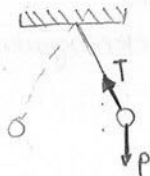


- Cuerpo atado a una cuerda que gira sobre su plano vertical



Peso: interacción cuerpo - Tierra  
 Tensión: interacción cuerpo - cuerda  
 Fuerza centrípeta:  $F_c = P - T$  (la diferencia entre las anteriores, por eso no es acción - reacción)

- Péndulo simple



⇒ Cuerpos que interactúan → Fuerzas aplicadas  
 +  
 Comportamiento anterior → Condiciones iniciales } Carácter del movimiento  
 ↓  
 Establecer la relación entre fuerzas aplicadas

## 2. Componentes intrínsecas de la Dinámica

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a} = F_t \vec{t} + F_n \vec{n} + F_p \vec{b} = m \frac{dv}{dt} \vec{t} + m \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

La fuerza que actúa sobre un pto. siempre está situada en el plano oscilador

$F_t$  varía en función del módulo de la velocidad  
 $F_n$  varía en función de la dirección de la velocidad

~ Cantidad de movimiento:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$   
 Momento lineal

~ Impulso:  $d\vec{I} = \vec{F} \cdot dt \rightarrow \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

~ Momento angular:  $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

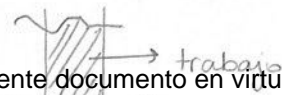
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$



$$\text{Potencia media } \langle P \rangle = \frac{W}{t_2 - t_1}$$

$$\text{Potencia instantánea } P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Sistema de unidades	Fuerza	Trabajo	Potencia
SI	Newton	Julio	Watio
cgs	Dina	Ergio	Ergio/s
Técnico	Kilopondio	Kilopondímetro	Kpm/s

$$1\text{J} = 10^7 \text{erg}$$

$$1\text{kp} = 9,8\text{J}$$

$$1\text{kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{J}$$

$$1\text{CV} = 736\text{W}$$

#### 4. Teoremas Fundamentales de la Dinámica

##### ~ Teorema de la cantidad de movimiento

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{Si } \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{p} = ct \Rightarrow \vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \\ (\Delta\vec{p} = 0)$$

##### ~ Teorema del impulso

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt = dI \rightarrow \int_{p_0}^p d\vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt \Rightarrow m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$$

##### ~ Teorema de la proyección de la cantidad de movimiento

$$\bullet \text{ Proyección sobre un eje: } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \vec{u})$$

$$\text{proy}_s \vec{F} = \frac{d}{dt} \text{proy}_s \vec{p}$$

$$\bullet \text{ Proyección sobre un plano: } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow (\vec{u} \times \vec{F}) \times \vec{u} = (\vec{u} \times \frac{d\vec{p}}{dt}) \times \vec{u}$$

$$\text{proy}_n \vec{F} = \frac{d}{dt} \text{proy}_n \vec{p}$$

$$\text{Aplicaciones: } \vec{F} \perp s \quad \forall t \Rightarrow \text{proy}_s \vec{p} = ct \Rightarrow \text{proy}_s \vec{v} = c$$

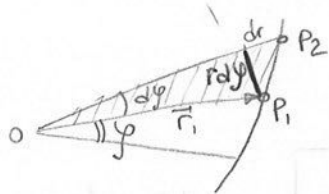
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\text{Aplicación: Fuerza central} \rightarrow \vec{H}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = ct$$

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{cte} \rightarrow |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{|\vec{L}_0|}{m} = \frac{\text{cte}}{m} = C \quad (\text{cte. de la ley de áreas})$$



$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r dy = \frac{1}{2} r^2 dy$$

área triángulo

Velocidad areolar  $\left( \frac{dA}{dt} \right) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{dy}{dt} = C$

$$\vec{OP} = \rho \vec{u}_\rho$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{u}_\phi$$

$$\vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\phi & \vec{u}_z \\ \rho & 0 & 0 \\ \dot{\rho} & \rho \dot{\phi} & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \dot{\phi} \vec{u}_z$$

$$\frac{|\vec{L}_0|}{m} = \rho^2 \dot{\phi} = \rho^2 \frac{dy}{dt} = 2C = \text{cte.}$$

• Momento axial:  $L_a = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{u}) \rightarrow \frac{dL_a}{dt} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}, \vec{u} \right) + \left( \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{u} \right) + \left( \vec{r}, \vec{p}, \frac{d\vec{u}}{dt} \right)$

$\left( \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}, \vec{u} \right)$  vectores //  $\vec{u}$  no es variable (eje fijo)

$$\frac{dL_a}{dt} = (\vec{r}, \vec{F}, \vec{u}) = \vec{M}_0 \cdot \vec{u} = M_u$$

Aplicación: Fuerza coplanaria con el eje (f, u)

$$\frac{dL_a}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{u} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{Si } \frac{dL_a}{dt} = 0 \rightarrow L_a = \vec{L}_0 \cdot \vec{u} = \text{cte} \Rightarrow (\vec{r} \times m\vec{v}) \cdot \vec{u} = \text{cte}$$

### ~ Teorema de la energía cinética

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = d \left( \frac{1}{2} m \cdot \frac{v \cdot v}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right)$$

$$\int_A^B dW = \int_A^B d \left( \frac{1}{2} m \cdot v \right) \rightarrow W_{AB} = \frac{1}{2} m \cdot v_B - \frac{1}{2} m \cdot v_A \Rightarrow W_{AB} = E_B - E_A = \Delta E_C$$

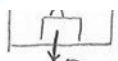
### 5. Fuerzas de inercia

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



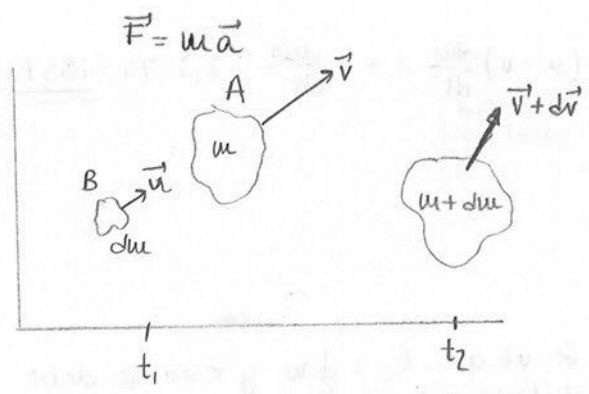
$$R = mg - ma = m(g - a) \quad \text{Final (El ascensor para en el piso)}$$



## 6. Sistemas de masa variable

Ejemplos: cohete, gota de agua que se cauriente o no en lluvia

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{Teorema de la cantidad de movimiento})$$



$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) - m\vec{v} - \vec{u}dm = m\vec{v} + m d\vec{v} + \vec{v}dm + dm d\vec{v} - m\vec{v} - \vec{u}dm$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m d\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) dm = m d\vec{v} - \vec{v}_e dm$$

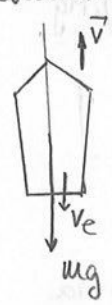
(↑) velocidad de escape

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt}$$

$\dot{m}$	$v_e$	
+	+	B alcanza a A
+	-	Choque frontal
-	+	Disparo hacia delante
-	-	Disparo hacia atrás (cohete)

+ : aumenta  
- : disminuye

Ej. 1. Tenemos un cohete que despeja verticalmente bajo la acción de la gravedad. Encontrar la velocidad en función del tiempo.



$$\vec{F} = -mg\vec{k}$$

$$\vec{v} = v\vec{k}$$

$$\vec{v}_e = -v_e\vec{k}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_e \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_e \frac{dm}{dt} \rightarrow dv = -g dt - v_e \frac{dm}{m}$$

$$v = -gt - v_e \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) + C$$

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \quad m=m_0 \\ \quad \quad v=v_0 \end{array} \right\} v_0 = -v_e \ln \left( \frac{m_0}{m_0} \right) + C \rightarrow C = v_0 + v_e \ln m_0$$

$$\underline{v(t) = v_0 - gt - v_e \ln \left( \frac{m}{m_0} \right)}$$

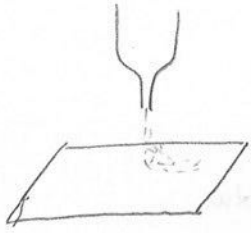


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Se va a diseñar un sistema transportador para una cantera de grava. Se tiene una tolva que deja caer grava a razón de  $75 \text{ kg/s}$  que se mueve con una rapidez de  $2,2 \text{ m/s}$ . Determinar la fuerza necesaria para mantener el movimiento a la banda. ¿Qué potencia debe tener el motor que impulsa a la banda?



$$\frac{dm}{dt} = 75 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$v = 2,2 \text{ m/s}$$

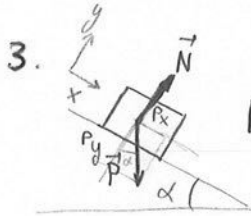
$$F = m \frac{dv}{dt} - (\mu - v) \frac{dm}{dt} = +v \frac{dm}{dt} = 2,2 \cdot 75 = \underline{\underline{165 \text{ N}}}$$

(v=cte) (velocidad inicial w/b)

$$P = Fv = v^2 \cdot \frac{dm}{dt} = (2,2)^2 \cdot 75 = \underline{\underline{363 \text{ W}}}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{dm}{dt} \quad (\text{Teorema e. cinética})$$

Se ve que  $E_c = \frac{1}{2} W$  y esto se debe a que se produce trabajo debido a la fuerza ficticia (inercial)

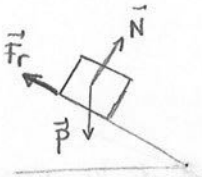


$$\boxed{\mu=0} \quad \sum F_y = 0 \rightarrow N = mg \cos \alpha$$

(siempre toca al plano)

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow mg \sin \alpha = ma_x \Rightarrow \underline{\underline{a = g \sin \alpha}}$$

(desliza)



$$\boxed{\mu \neq 0}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$$\sum F_x = ma \rightarrow mg \sin \alpha - F_r = ma$$

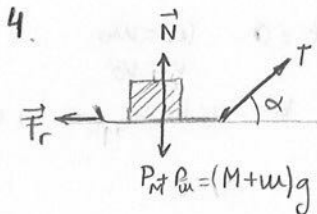
$$mg \sin \alpha - \mu N = ma$$

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma$$

$$\underline{\underline{a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} \rightarrow \mu_0$$

$$(F_r)_{\text{max}} = \mu_E N$$

Si ya se mueve:  $F_r = \mu_D N$   
 $(\mu_E > \mu_D)$



Determinar la fuerza de rozamiento para que la plataforma se mueva, y la aceleración del bloque

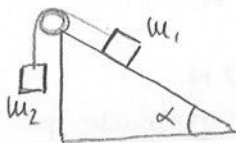
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

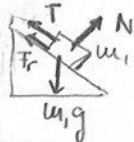
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$a = \frac{T \cos \alpha - F_r}{M+m}$$

5. Una masa  $m_1$  de 10 kg descansa sobre una superficie inclinada  $37^\circ$ . La caja está conectada por una cuerda ligera que pasa por una polea sin masa y sin fricción hacia otra masa  $m_2$  que cuelga ligeramente como se muestra en la figura. Si  $\mu_e = 0,4$ , determine el rango de valores para que  $m_2$  se mantenga en reposo.



a)  $m_2$  pequeña



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - m_1 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = m_1 g \cos \alpha$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow m_1 g \sin \alpha - T - \mu_e N = 0$$

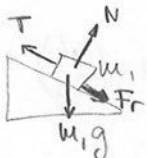
$$T = m_1 g \sin \alpha - \mu_e m_1 g \cos \alpha$$

$$T = m_1 g (\sin \alpha - \mu_e \cos \alpha)$$

$$T = m_2 g \rightarrow m_2 = \frac{m_1 g (\sin \alpha - \mu_e \cos \alpha)}{g} = 2,8 \text{ kg}$$

$$(0 \leq m_2 < 2,8) \text{ kg}$$

b)  $m_2$  grande



$$m_1 g \sin \alpha + \mu_e N - T = 0 \rightarrow m_2 = 9,2 \text{ kg} \Rightarrow \underline{2,8 < m_2 < 9,2}$$

( $m_1$  estará en reposo)

Ahora,  $\mu_D = 0,3$  y  $m_2 = 10 \text{ kg}$ , determine la aceleración del sistema

$m_2 > 9,2 \rightarrow$  ASCENSO  $m_1$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = m_1 g \cos \alpha$$

$$\sum F_x = -m_1 a \rightarrow m_1 g \sin \alpha + \mu_D N - T = -m_1 a$$

$$a = 0,78 \text{ m/s}^2$$

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

6. Una bola de 0,15 kg está atada al extremo de una cuerda de 1,1 m de longitud y masa despreciable, y se la hace girar en un círculo vertical. Determinar la velocidad mínima que la bola debe tener en la parte superior (A) para moverse continuamente en círculos. Calcular la tensión de la cuerda en el punto más bajo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

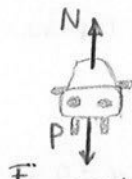
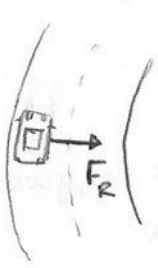
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$v_B = 2v_A$$

7. Un auto de carreras de 1000 kg va a entrar en una curva plana de 50m de radio a una velocidad de 50 km/h ¿El vehículo tomará la curva o resbalará?

- a) El pavimento está seco y  $\mu_E = 0,6$   
 b) El pavimento está helado y  $\mu_E = 0,25$



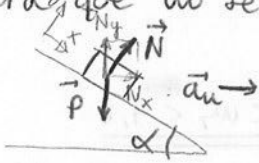
$$F = m \frac{v^2}{r} = \frac{1000 \cdot (14)^2}{50} = 3900 \text{ N}$$

↳ Suponiendo que es la fuerza requerida para tener una trayectoria circular

$$F_{R_{\max}} = \mu_e N = \mu_e mg = 9800 \mu_e$$

- a)  $F_{R_{\max}} = 9800 \cdot 0,6 = 5900 \text{ N}$  → Como la fuerza es mayor, tomamos la curva sin problemas  
 b)  $F_{R_{\max}} = 9800 \cdot 0,25 = 2500 \text{ N}$  → Como es menor, nos salimos por la curva

8. Un vehículo viaja a una velocidad  $v$  y describe una curva de radio  $R$ . Determinar el ángulo que deberá inclinarse transversalmente al camino de manera que no se requiera rozamiento.



$$\left. \begin{aligned} N \sin \alpha &= m \cdot \frac{v^2}{R} \\ N \cos \alpha &= P = mg \end{aligned} \right\} \quad \tan \alpha = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow \alpha = \arctg \left( \frac{v^2}{Rg} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## TEMA 7: Dinámica del punto (RESUMEN)

## LEYES DE NEWTON

1ª ley → Principio de Inercia: Un cuerpo permanece en estado de reposo o de m.r.u. si no actúa ninguna fuerza sobre él o si la resultante de todas ellas es nula

2ª ley → Principio Fundamental de la Dinámica: si sobre un punto material o cuerpo rígido actúa una fuerza resultante  $\vec{F}$ , este adquiere una aceleración que es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

3ª ley → Principio de Acción y Reacción: si un cuerpo ejerce una fuerza (acción) sobre otro cuerpo, este a su vez ejerce sobre el primero otra fuerza (reacción), con el mismo módulo y dirección, pero de sentido contrario. Ambas fuerzas se producen simultáneamente.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{dv}{dt} \vec{t} + m \cdot \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \rightarrow \text{Plano OSCILADOR}$$

Cantidad de movimiento:  $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\text{Impulso: } \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$$

$$\text{TRABAJO: } W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Momento cinético:  $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\text{Leje} = \vec{L}_0 \cdot \vec{u}_{\text{leje}} = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{u})$$

POTENCIA:  $\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t}$  ;  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

P.

## TEOREMAS FUNDAMENTALES

~ Cantidad de movimiento:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

si  $\vec{F} = \vec{0}$ ,  $\vec{p} = cte \Rightarrow \vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$   
( $\Delta\vec{p} = 0$ )

~ Impulso:  $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}$

~ Proyección de la cantidad de movimiento:

$\vec{F} \perp \vec{s} \Rightarrow \text{proy}_{\vec{s}} \vec{F} = \frac{d(\text{proy}_{\vec{s}} \vec{p})}{dt}$  si  $\vec{F} \perp \vec{s} \forall t \rightarrow \text{proy}_{\vec{s}} \vec{p} = cte \Rightarrow \text{proy}_{\vec{s}} \vec{v} = cte$

Cartagena99

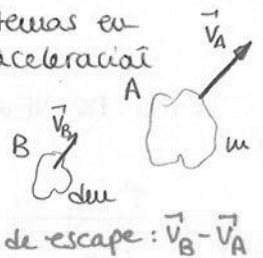
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Fuerzas de inercia:  $F_{inert} = -m \cdot a$  Solo tiene lugar en sistemas en los que aparece una aceleración

Sistema de masa variable:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \cdot \frac{dm}{dt}$



$\dot{u}_i$	$v_e$	
↑	↑	B alcanza a A
↑	↓	Choque frontal
↓	↑	Disparo hacia delante
↓	↓	Disparo hacia atrás (cohetes)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## T8-TRABAJO Y ENERGIA (I)

## 1. Campos escalares y vectoriales

CAMPO ESCALAR.Magnitud escalar:  $U = U(x, y, z)$ 

$$P(x, y, z) \rightarrow U$$

- Independiente del sistema de referencia
- Superficies de nivel  $\rightarrow$  espacio geométrico donde se localizan todos los puntos que tienen el mismo valor de la función  $U$ .

$$SN \rightarrow \{P(x, y, z) / U = C\}$$

La función  $U(x, y, z)$  es una función uniforme, por lo que cada punto de  $x, y, z$  tiene un único valor de la función  $U(x, y, z)$ . Por lo tanto, las superficies de nivel no se pueden cortar ni ser tangentes.

CAMPO VECTORIAL.Magnitud vectorial:  $\vec{V}(x, y, z)$ 

$$\vec{V} = \vec{V}(r) \rightarrow \vec{V} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

$X, Y, Z$  son funciones uniformes, por lo que en cada punto del espacio tenemos perfectamente definidos.

- Varían en frente a un cambio de referencia
- Es invariante la norma y la magnitud vectorial
- Líneas de campo  $\rightarrow$  en cada punto de la línea, el vector campo es tangente a dicha línea en dicho punto.



$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

vector tg a la línea

$$\vec{V} \parallel d\vec{l} \quad \vec{V} \times d\vec{l} = 0 \quad (\text{camps. proporcionales})$$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dz} \quad | \quad \frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dx} \rightarrow \text{ec. superficie}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ej. Sea el campo vectorial  $\vec{F}(x,y) = (y, -x)$ . Escribir la ecuación de las líneas de campo y decir de qué líneas se trata.

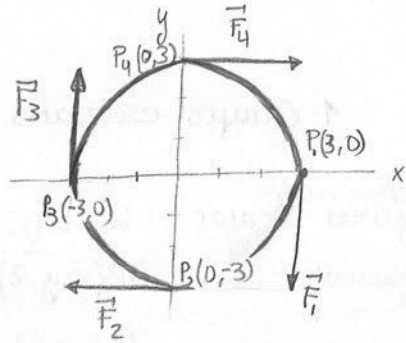
$$\vec{F}(x,y) = X(x,y)\vec{i} + Y(x,y)\vec{j} = y\vec{i} - x\vec{j}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \rightarrow -x dx = y dy$$

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C' \rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C''$$

Las dos constantes de integración están agapadas en esta

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C'' \rightarrow x^2 + y^2 = C''' \rightarrow \text{Circunferencia}$$



## 2. Circulación de un campo vectorial

Dado un campo vectorial  $\vec{V}(x,y,z)$ , llamamos circulación a la integral entre dos puntos de dicho campo.

$$\vec{V}(x,y,z) \quad \underline{C = \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{r}}$$

El trabajo sería la integral de la función fuerza

$$C = \int_A^B X(x,y,z) dx + \int_A^B Y(x,y,z) dy + \int_A^B Z(x,y,z) dz$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} t_1 \leq t \leq t_2 \quad \begin{array}{l} x' = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = x' dt \\ y' = \frac{dy}{dt} \rightarrow dy = y' dt \\ z' = \frac{dz}{dt} \rightarrow dz = z' dt \end{array}$$

$$C = \int_{t_1}^{t_2} X(x(t), y(t), z(t)) x' dt + \int_{t_1}^{t_2} Y(x(t), y(t), z(t)) y' dt + \int_{t_1}^{t_2} Z(x(t), y(t), z(t)) z' dt$$

Ej. Sea un campo vectorial  $\vec{V} = (\cos z, e^x, e^y)$ . Hallar la circulación a lo largo de una trayectoria  $x(t) = 1, y(t) = t, z(t) = e^t$  con  $0 \leq t \leq 2$

$$x' = \frac{dx}{dt} = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = 1$$

$$C = \int_0^2 \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \cos(e^t) \cdot 0 dt + \int_0^2 e^1 \cdot 1 dt + \int_0^2 e^t \cdot e^t dt = e \cdot t \Big|_0^2 + \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_0^2 =$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

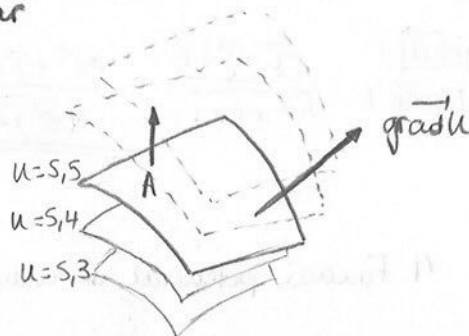
$$y = a \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$W = \int F dx = \int X(x,y,z) dx + \int Y(x,y,z) dy + \int Z(x,y,z) dz$$



### 3. Gradiente de un campo escalar

$$u = u(x, y, z) \rightarrow \text{grad } u = \vec{\nabla} u$$



- Dirección: en cada punto es perpendicular a la superficie de nivel
- Sentido: hacia las superficies de nivel crecientes
- Módulo:  $|\text{grad } u| = \frac{du}{dn}$  normal a la superficie

$$[\text{grad } u] = [u] \cdot L^{-1}$$

$$\vec{\nabla} u \begin{cases} \text{Cartesianas: } \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \\ \text{Cilíndricas: } \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{u}_z \\ \text{Esféricas: } \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \cdot \text{sen } \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \end{cases}$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad \left. \begin{array}{l} u = u(x, y, z) \\ d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \end{array} \right\} \underline{du} = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \underline{\text{grad } u} \cdot d\vec{l}$$

$$du = |\text{grad } u| |d\vec{l}| \cos \alpha \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 0^\circ \\ \alpha = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 0 \rightarrow u = \text{cte.} \end{array}$$

$$\frac{du}{dl} = |\text{grad } u| \cos \alpha = \text{proy}_{d\vec{l}}(\text{grad } u) \Rightarrow \frac{du}{dl} : \text{DERIVADA DIRECCIONAL (Da lo que varía u en una determinada dirección)}$$

También  $\text{grad } u$  se puede considerar la derivada direccional de orden máximo.

- Ej. 1. Considerar  $u(x, y, z) = x^3 y^3 + y - z + 2$ , ¿A qué superficie de nivel corresponde el punto  $(0, 0, 2)$ ?
2. Demostrar que el vector  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{j} - \vec{k})$  es un vector unitario normal a esa superficie en ese punto.

1.  $u = 0 \cdot 0 + 0 - 2 + 2 \rightarrow \underline{u(0, 0, 2) = 0}$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

4. Qual es la direcciu de máxima variaciu en el punto (1,1,1)

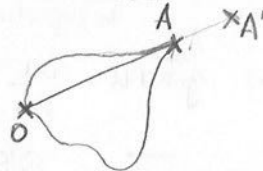
$$\vec{n} = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|} = \frac{e\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{e^2 + 1 + 1}} = \frac{e\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{e^2 + 2}}$$

#### 4. Funciu potencial de campos conservativos

Sea un campo vectorial  $\vec{v}(x,y,z)$  cuya circulaciu no depende del camino seguido se puede asociar a dicho campo vectorial un campo escalar que verifica:

pto. O  $\rightarrow u(O) = u_0$

pto. A  $\rightarrow u(A) = u_0 + \int_0^A \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$



$$u(A) = u_0 + \int_0^A \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \rightarrow u(A') - u(A) = u_0 + \int_0^{A'} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} - u_0 - \int_0^A \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^{A'} \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\left. \begin{aligned} dU &= \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \\ dU &= \text{grad}U \cdot d\vec{\ell} \end{aligned} \right\} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \text{grad}U \cdot d\vec{\ell} \quad \forall d\vec{\ell} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \text{grad}U}$$

U: funciu potencial  
o el potencial de  $\vec{v}$ .

$\uparrow$   
 $\exists U / \vec{v} = \text{grad}U$       $\vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \text{grad}U \cdot d\vec{\ell} = dU$

$$\int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B dU = U(B) - U(A) \Rightarrow \text{No depende del camino}$$

$\downarrow$   
 $\oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0$   
(Circulaciu por un camino cerrado)

$$\int_{AII}^B \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_{AII}^B \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = - \int_B^{AII} \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\int_{AII}^B \vec{v} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^{AII} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ c.q.d.}$$

Un campo vectorial es conservativo cuando tiene asociada una funciu potencial, es decir,  $\vec{v} = \text{grad}U$ , o cuando  $\oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0$ , o  $\text{rot} \vec{v} = 0$

$$\text{rot} \vec{v} = 0 \quad \text{rot} \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ej: Tenemos un campo vectorial  $\vec{A} = (2xy + z^3)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$  y  $\vec{A} = \text{grad } \phi$ .  
 Determinar  $\phi$  y la integral de  $\vec{A} \cdot d\vec{r}$  a través de un camino  $C_1$ , de manera que  $C_1$  une dos puntos:  $(1, -1, 1)$  y  $(2, 1, 2)$ .

$\phi$ : campo escalar  $\rightarrow \phi = \phi(x, y, z)$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} = \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = A_x = 2xy + z^3 \rightarrow \phi = x^2y + z^3x + C_1(y, z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = A_y = x^2 + 2y \rightarrow \phi = x^2y + y^2 + C_2(x, z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = A_z = 3xz^2 - 2 \rightarrow \phi = xz^3 - 2z + C_3(x, y)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\phi = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z}}$$

$$C_1 = \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = \int d\phi = \phi(2) - \phi(1) = 4 + 16 + 1 - 4 - (1 + 1 + 1 - 2) = \underline{18}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Campos { ESCALAR → Magnitud escalar:  $u = u(x, y, z)$   
Superficies de nivel

VECTORIAL → Magnitud vectorial:  $\vec{v} = x(x, y, z)\vec{i} + y(x, y, z)\vec{j} + z(x, y, z)\vec{k}$   
Líneas de campo

$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  }  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$   
 $\vec{v} // d\vec{l} \rightarrow \vec{v} \times d\vec{l} = 0$

~ Circulación

$\vec{v}(x, y, z)$   $G = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A^B x(x, y, z) dx + \int_A^B y(x, y, z) dy + \int_A^B z(x, y, z) dz$

~ Gradiente  $\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

$u = u(x, y, z)$   $\text{grad} \vec{u} = \left( \vec{\nabla} \right) u$

[ Dirección:  $\perp$  a la superficie de nivel en cada punto  
Sentido: hacia las superficies de nivel crecientes  
Módulo:  $|\text{grad} \vec{u}| = \frac{du}{dn}$      $[\text{grad} \vec{u}] = [u] \cdot \vec{l}'$

$\text{grad} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \rightarrow$  Cartesianas

$\text{grad} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{u}_z \rightarrow$  Cilíndricas

$\text{grad} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \rightarrow$  Esféricas

$du = \text{grad} \vec{u} \cdot d\vec{l} = |\text{grad} \vec{u}| |d\vec{l}| \cos \alpha \rightarrow \frac{du}{d\vec{l}} = \text{proy}_{d\vec{l}}(\text{grad} \vec{u})$   
Derivada direccional



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$

$\text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right. Below the text is a thick orange horizontal bar.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

T9-TRABAJO Y ENERGÍA (II)

1. Movimiento de un punto material con fuerzas que derivan de un potencial

$$\exists E_p \left\{ \vec{F} = -\text{grad} E_p \quad d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\text{grad} E_p \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

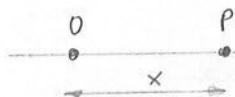
$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + E_p\right) = 0 \rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2}mv^2 + E_p = \text{cte} = E}}$$

Teorema de conservación de la energía mecánica

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int \text{grad} E_p \cdot d\vec{r} = -\int dE_p = E_p(1) - E_p(2)$$

2. Movimiento de un punto material sometido a la acción de una fuerza conservativa que es función de la distancia a un punto fijo.

$$F = F(x)$$



$$F \text{ conserv.} \rightarrow \exists E_p = E_p(x) / F = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F \cdot dx = -\frac{dE_p}{dx} \cdot dx = -dE_p$$

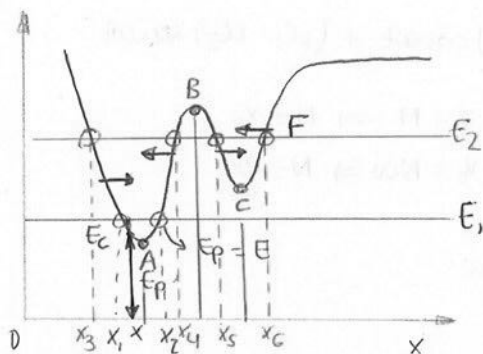
$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + E_p(x)\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = E \Rightarrow \underline{\underline{v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))}}}$$

Función cinemática

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))}} = \int_{t_0}^t dt$$

Función horaria

$\hookrightarrow v > 0 \Rightarrow E > E_p(x)$   
 Si  $v = 0 \rightarrow E = E_p(x)$   
 $\downarrow$   
 $E_c = 0$



$$F = -\frac{dE_p}{dx} \begin{cases} \frac{dE_p}{dx} > 0 & F < 0 \text{ (izquierda)} \\ \frac{dE_p}{dx} < 0 & F > 0 \text{ (derecha)} \end{cases}$$

Movimiento oscilatorio del cuerpo material entre dos puntos

$x_1, x_2$ : puntos de retorno, en los que la energía potencial es igual a la energía total.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

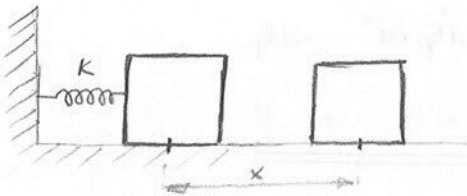


... punto de equilibrio estable  
 Máximo: punto de equilibrio inestable

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_p}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d^2E_p}{dx^2} > 0 \text{ mín.} \\ < 0 \text{ máx.} \end{aligned} \right\}$$

Entre dos puntos, el tiempo es finito. Sin embargo, si tiene que alcanzar un punto que es máximo, consideramos que transcurre un tiempo infinito (la integral de la función horaria no es convergente).

### 3. Movimiento oscilatorio



$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ley de Hooke: } F = -kx \\ \text{2ª Ley de Newton: } F = ma \end{array} \right\} -kx = -m\omega^2 x \quad \left[ \begin{array}{l} k = m\omega^2 \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array} \right.$$

$$F \rightarrow x = x(t)$$

$$F = ma \rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}} \quad \text{Ecuación diferencial}$$

$$\alpha = \frac{dx}{dt} \rightarrow \alpha^2 = \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha^2 + \omega^2 = 0}} \quad \text{Ecuación característica}$$

↳ quitas x porque es como si fuese la variable anterior  $\omega$  es la derivada de  $x$  y por eso aparece

$$\alpha^2 = -\omega^2 = i^2 \omega^2 \rightarrow \alpha = \pm i\omega$$

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} + C_3 e^{\omega t} \dots \rightarrow x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$x = C_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) = (C_1 + C_2) \cos \omega t + (iC_1 - iC_2) \operatorname{sen} \omega t$$

$$\left. \begin{array}{l} x = M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t \\ v = -M \omega \operatorname{sen} \omega t + N \omega \cos \omega t \end{array} \right\} \begin{array}{l} [t=0] \quad x = x_0 \rightarrow x_0 = M \Rightarrow M = x_0 \\ v = v_0 \rightarrow v_0 = N\omega \Rightarrow N = \frac{v_0}{\omega} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \\ x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{array} \right\} \text{Ambas son soluciones de la ecuación diferencial}$$

$$x_0 = A \operatorname{sen} \varphi \quad \dots \quad \text{(amplitud) queda perfectamente}$$

**Cartagena99**

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**



### 4. Energía del oscilador simple

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Fdx = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

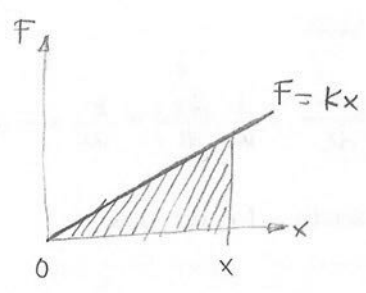
$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energía cinética del oscilador}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{Energía potencial elástica}} = \text{cte} = E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \rightarrow mv^2 + m\omega^2x^2 = mv_0^2 + m\omega^2x_0^2$$

$$v^2 + \omega^2x^2 = v_0^2 + \omega^2x_0^2$$

$$\left[ \begin{array}{l} v=0 \rightarrow x_{\text{máx}} = A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \\ x=0 \rightarrow v_{\text{máx}} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2x_0^2} \end{array} \right.$$

Ecuaiones extremas



$$dW = Fdx = kx dx \rightarrow W = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times kx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = A \text{sen}(\omega t + \varphi) \\ v = A\omega \text{cos}(\omega t + \varphi) \end{array} \right\} E = \frac{1}{2}m A^2 \omega^2 \text{cos}^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \frac{m\omega^2}{k} A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}m A^2 \omega^2 [\text{cos}^2(\omega t + \varphi) + \text{sen}^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2}k A^2$$

La energía de un oscilador es constante y proporcional al cuadrado de la amplitud.

### 5. Energías cinética y potencial medias

se va a calcular el valor medio

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



$$\langle \text{sen}^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{4} k A^2$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} k A^2 \langle \text{sen}^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{4} k A^2$$

$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{2} E$  → los valores medios son iguales a la mitad de la energía  
 $(E_c)_{\text{max}} = (E_p)_{\text{max}} = E$  → los valores máximos son iguales a la energía

## 6. Oscilaciones amortiguadas

$F_e = -kx$   $F_e$ : fuerza elástica  
 $F_r = -\lambda v$   $\lambda$ : coeficiente de fricción

$$F_e + F_r = ma \rightarrow -kx - \lambda v = ma$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$   $\omega_0$  porque existe una fuerza de rozamiento. Representa la frecuencia propia del oscilador (SIN rozamiento) ⇒ se diferencia entre  $\omega$  y  $\omega_0$ :

$2\delta = \frac{\lambda}{m}$   $\delta$ : coeficiente de amortiguación

$\omega_0$  → frecuencia propia del oscilador, SIN rozamiento  
 $\omega$  → frecuencia CON rozamiento

$$\downarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \rightarrow x = x(t) \text{ Ecuación diferencial}$$

$$\alpha = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \underline{\alpha^2 + 2\delta \alpha + \omega_0^2 = 0} \text{ Ecuación característica}$$

$$\alpha = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} \Rightarrow \underline{\alpha = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \text{ Soluciones de la ec. caract.}$$

a)  $\delta < \omega_0$  → fricción muy pequeña SUBAMORTIGUAMIENTO

$$\alpha = -\delta \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

La frecuencia del oscilador en un medio viscoso (YA con rozamiento) ( $\omega < \omega_0$ )

$$x = e^{(-\delta + i\omega)t} + e^{(-\delta - i\omega)t} = e^{-\delta t} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = e^{-\delta t} (2 \cos(\omega t))$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

c)  $\delta = \omega_0$  AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO (se alcanza la amplitud cero antes que en los

### 7. Dispersión de energía de un oscilador. Factor de calidad y tiempo de relajamiento

~ Energía del oscilador en un instante

$$E(t) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} m (A e^{-\delta t})^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k (A e^{-\delta t})^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$x = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + A e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t + \varphi) \approx A e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$\delta < \omega_0 \rightarrow$  En caso de subamortiguamiento, se puede tachar el primer término porque es muchísimo menor que el segundo

La variación de la exponencial es muy pequeña, y el coseno por lo que no se va a promediar para el cálculo del valor medio de la energía y se considera constante

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{4} m (A e^{-\delta t})^2 (\omega^2 + \omega_0^2)$$

~ Energía que disipa el oscilador en un periodo (dE)

$$dE = F_r \cdot dx = -\lambda v dx = -\lambda v \cdot v dt = -\lambda v^2 dt$$

$$dE = -\lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$$\int_0^T dE = -\lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = -\lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{2}$$

La variación de la exponencial se considera de frente al seno/coseno

porque es una pérdida  
Energía q disipada

$$\frac{Q}{\downarrow} = 2\pi \cdot \frac{E(t)}{E_{perdida \text{ en un ciclo o un periodo}}} = 2\pi \cdot \frac{\frac{1}{4} m (A e^{-\delta t})^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{\lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega \pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m(\omega^2 + \omega_0^2)}{\lambda \omega} = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{\delta \omega}$$

$$\delta \ll \omega_0 \text{ (subamortiguamiento)} \rightarrow Q = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{\delta \omega} \approx \frac{1}{4} \frac{2\omega_0^2}{\delta \omega} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Si un sistema tiene el factor de calidad muy grande, pierde más energía y llega antes a la amplitud cero. Si es muy pequeño, mantiene las oscilaciones.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\tau = \frac{1}{2\delta}$$

↳  
Tiempo de relajamiento

Tiempo que pasa hasta que nuestra energía tarda en reducirse en un factor  $1/e$ .

$$E(z) = E_0 e^{-z/\tau} \rightarrow E(z) = E_0 e^{-z/2\delta} = \frac{E_0}{e} \Rightarrow \underline{\underline{E(z) = \frac{E_0}{e}}}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

TEMA 9: Trabajo y energía (II) (RESUMEN)

~ Movimiento de un punto material

•  $\vec{F} = -\text{grad} E_p$   $d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\text{grad} E_p \cdot d\vec{r} = -dE_p$   
 $\exists E_p$

$\downarrow$

$d(\frac{1}{2}mv^2 + E_p) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \text{cte} = E$

Teorema de CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.

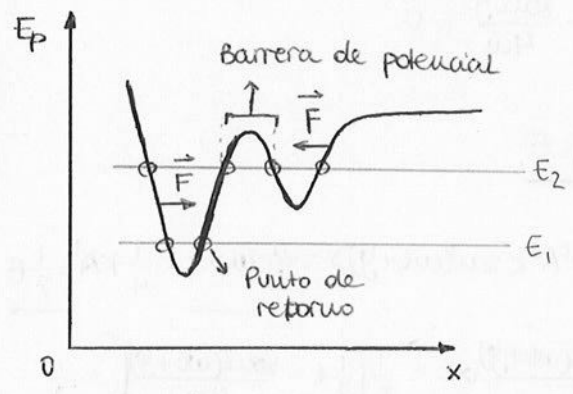
$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -\text{grad} E_p \cdot d\vec{r} = -\int dE_p = E_p(1) - E_p(2)$

•  $F = F(x)$   $d(\frac{1}{2}mv^2) = F \cdot dx = -\frac{dE_p}{dx} dx = -dE_p$   
 $\exists E_p = E_p(x)$

$\downarrow$

$\frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = \text{cte} = E \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))}$  **Función CINEMÁTICA**

$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p)} \Rightarrow \int_{t_0}^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))}}$  **Función HORARIA**



$F = -\frac{dE_p}{dx} \begin{cases} \frac{dE_p}{dx} > 0 \rightarrow F < 0 \\ \frac{dE_p}{dx} < 0 \rightarrow F > 0 \end{cases}$

Si  $\frac{dE_p}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d^2E_p}{dx^2} \begin{cases} > 0 \text{ MÍNIMO} \rightarrow \text{pto. de eq. ESTABLE} \\ < 0 \text{ MÁXIMO} \rightarrow \text{pto. de eq. INESTABLE} \end{cases}$

~ Movimiento oscilatorio

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$   $x_0 = A \cos \varphi$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• Energía del oscilador simple

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Fdx = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \rightarrow d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energía CINÉTICA del oscilador}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{Energía POTENCIAL elástica}} = \text{cte} = E = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 ; E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$mv^2 + kx^2 = mV_0^2 + kx_0^2$$

$$mv^2 + m\omega^2 x^2 = mV_0^2 + m\omega^2 x_0^2$$

$$v^2 + \omega^2 x^2 = V_0^2 + \omega^2 x_0^2 \quad \left[ \begin{array}{l} v=0 \Rightarrow x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{V_0^2}{\omega^2} + x_0^2} = A \\ x=0 \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{V_0^2 + \omega^2 x_0^2} \end{array} \right.$$

$$dW = Fdx = kx dx \Rightarrow W = \frac{1}{2}kx^2 = \text{Área}$$

• Energía cinética y potencial medias

$$\langle E_c \rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle$$

$$y = f(x) \rightarrow \langle y \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b y dx \Rightarrow \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{T-0} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \phi)}{2} dt$$

$$= \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2}t + \frac{\text{sen} 2(\omega t + \phi)}{4\omega} \right]_0^T = \frac{1}{T} \left( \frac{T}{2} + \frac{\text{sen} 2(\omega T + \phi)}{4\omega} - 0 - \frac{\text{sen} 2\phi}{4\omega} \right) = \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \frac{\text{sen} 2(\omega \frac{2\pi}{\omega} + \phi)}{4\omega} - \frac{\text{sen} 2(\phi)}{4\omega} = \frac{\text{sen} 2\phi}{4\omega} - \frac{\text{sen} 2\phi}{4\omega} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}mA^2\omega^2 = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E$$

$$\langle E_p \rangle = \langle \frac{1}{2}kx^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \langle \text{sen}^2(\omega t + \phi) \rangle \Rightarrow \langle E_p \rangle = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E$$

$$\langle \text{sen}^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{T-0} \int_0^T \text{sen}^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2(\omega t + \phi)}{2} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2}t - \frac{\text{sen} 2(\omega t + \phi)}{4\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2}$$

• Oscilaciones amortiguadas

$$F_e = -kx \quad F_e \rightarrow \text{Fuerza ELÁSTICA}$$

$$F_e + F_r = ma \rightarrow -kx - \lambda v = ma \rightarrow ma + \lambda v + kx = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\gamma > \omega_0 \rightarrow$  SOBREAORTIGUAMIENTO

Desaparecen las oscilaciones

Frecuencia del oscilador en un medio viscoso con rozamiento

• Energía del oscilador con sobamortiguamiento en un instante

$$E(t) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{siendo} \quad x = A e^{-\delta t} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\delta A e^{-\delta t} \text{sen}(\omega t + \varphi) + A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega$$

$$\langle E(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m (A e^{-\delta t})^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} k (A e^{-\delta t})^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{1}{4} m (A e^{-\delta t})^2 (\omega^2 + \omega_0^2)$$

• Energía que disipa el oscilador

$$dE = F_r dx = -\lambda v dx = -\lambda v v dt = -\lambda v^2 dt = -\lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$$E(0, T) = -\lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega^2 \frac{T}{2} = -\lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow E = \ominus \lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega \pi$$

la variación de la exponencial se puede considerar constante al compararla con el coseno

↓ pérdida

• Factor de calidad

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\langle E(t) \rangle}{|dE|} = 2\pi \cdot \frac{\frac{1}{4} m (A e^{-\delta t})^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{\lambda (A e^{-\delta t})^2 \omega \pi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{\delta \omega} = 2\pi \cdot \frac{E(t)}{-\frac{dE}{dt} T}$$

si  $\delta < \omega_0 \rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$

$$\left. \begin{aligned} E(t) &= E_0 e^{-2\delta t} \\ A(t) &= A e^{-\delta t} \end{aligned} \right\} \frac{E(t)}{E_0} = \left( \frac{A(t)}{A} \right)^2$$

• Tiempo de relajamiento

$$\tau = \frac{1}{2\delta} \rightarrow E(\tau) = \frac{E_0}{e}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue triangle pointing downwards and an orange triangle pointing upwards, which together form a larger, irregular shape.

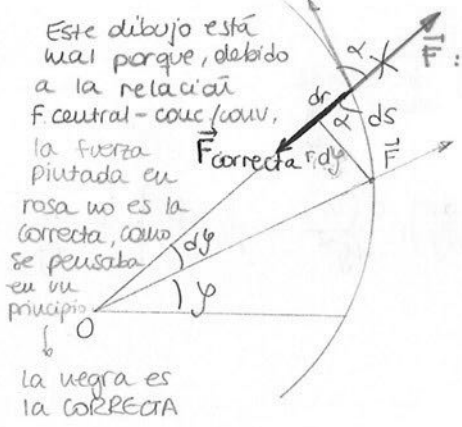
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



T10-MOVIMIENTO DE UN PUNTO BAJO FUERZAS CENTRALES



Este dibujo está mal porque, debido a la relación F central = conc / r^n, la fuerza pintada en rosa no es la correcta, como se pensaba en un principio. La negra es la CORRECTA.

$$\vec{F}_{\text{central}} \rightarrow \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L}_O = \vec{c}te \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo} \\ \text{Dirección} \\ \text{Sentido} \end{array} \right.$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow \vec{L}_O \perp \vec{r}, \vec{v}$$

$$\vec{L}_O \perp \Pi_{\text{tray}}$$

La trayectoria que va a seguir el punto móvil es plana y recibe el nombre de CÓNICA.

- Cónicas
- Elipse
  - Hiperbola
  - Parábola
  - Circunferencia

(RECORDATORIO)

$$v = \omega r$$

$$\frac{|L_O|}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}| = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = cte = C_1 \quad (\text{constante de las áreas})$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} C_1 = cte \quad (\text{velocidad areolar})$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{F}_{\text{central}} \rightarrow \vec{a}_{\text{central}} \text{ (radial)} \Rightarrow 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} = 0 \quad (\text{solo tiene componente radial, } \vec{u}_\rho)$$

$$\rho \cdot \frac{d\dot{\varphi}}{dt} + 2\dot{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \xrightarrow{\text{se divide entre } \rho \cdot \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2 \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\ln \dot{\varphi} + 2 \ln \rho = cte \rightarrow \ln \dot{\varphi} + \ln \rho^2 = cte \Rightarrow \rho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C_1$$

~ Coordenadas de la fuerza central

$$F(r, t) \rightarrow a) \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_1 \quad \circ \quad d\varphi = \frac{C_1^2}{r^2} dt \quad \circ \quad dt = \frac{r^2}{C_1} d\varphi$$

$$F(\rho, \varphi) \rightarrow b)$$

Teorema Energía cinética:

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F dr \rightarrow \frac{1}{2} m d(v^2) = F dr$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

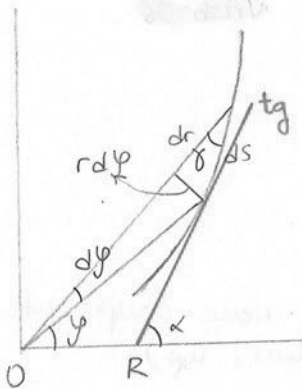
$$b) v^2 = \frac{dr^2 + r^2 dy^2}{dt^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G^2}{r^4} \left( \frac{dr}{dy} \right)^2 + \frac{G^2}{r^2} = G^2 \left[ \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dy} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] =$$

$$v^2 = G^2 \left[ \left( \frac{d(1/r)}{dy} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} m G^2 d \left[ \left( \frac{d(1/r)}{dy} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] = F \cdot dr \xrightarrow{\text{se divide entre } dy}$$

$$\frac{1}{2} m G^2 \left[ 2 \frac{d(1/r)}{dy} \cdot \frac{d^2(1/r)}{dy^2} - \frac{2}{r^3} \frac{dr}{dy} \right] = F \frac{dr}{dy} \rightarrow m G^2 \left[ -\frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{dy} \right) \cdot \frac{d^2(1/r)}{dy^2} - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dy} \right] = F \cdot \frac{dr}{dy}$$

$$\boxed{F(r, y) = -\frac{m G^2}{r^2} \left( \frac{d^2(1/r)}{dy^2} + \frac{1}{r} \right)} \quad \text{Formula de BINET}$$

~ Concavidad y convexidad de las curvas (trayectoria)



$$c = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\alpha = \varphi + \delta = \varphi + \arctg \frac{r dy}{dr} = \varphi + \arctg \frac{r}{r'} \rightarrow r' = \frac{dr}{dy}$$

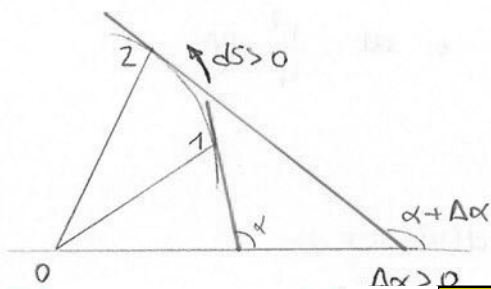
$$d\alpha = d \left( \varphi + \arctg \frac{r}{r'} \right)$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 dy^2} = \sqrt{dy^2 \left( \frac{dr^2}{dy^2} + r^2 \right)} = dy \sqrt{r'^2 + r^2}$$

Catetos elevados al cuadrado y sumados

$$c = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \frac{d}{dy} \left( \varphi + \arctg \frac{r}{r'} \right) = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \left( 1 + \frac{1}{1 + \left( \frac{r}{r'} \right)^2} \cdot \frac{r' r' - r r''}{r'^2} \right)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \left( 1 + \frac{r'^2 - r r''}{r'^2 + r^2} \right) = \frac{r'^2 + r^2 + r'^2 - r r''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\alpha}{ds} = \frac{2r'^2 + r^2 - r r''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}}$$



$$\frac{d\alpha}{ds} > 0 \Rightarrow \text{Cónica respecto de } O$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

~ Relación entre la fuerza central y la concavidad/convexidad

$$\frac{d(1/r)}{dy} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dy} = -\frac{r'}{r^2}$$

$$\frac{d^2(1/r)}{dy^2} = -\frac{r^2 r'' - r' \cdot 2r r'}{r^4} = \frac{2r r'' - r'^2}{r^3}$$

$$F = -\frac{mG^2}{r^2} \left( \frac{2r r'' - r'^2}{r^3} + \frac{1}{r} \right)$$

Fórmula de Binet

$$F = -\frac{mG^2}{r^5} (2r r'' - r'^2 + r^2)$$

↓

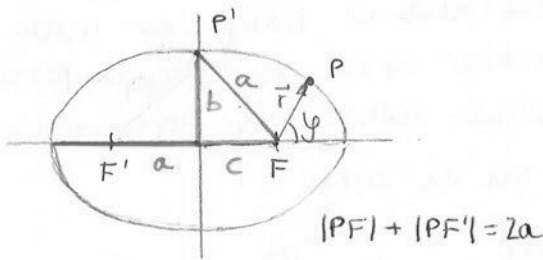
$F = -\frac{mG^2}{r^5} (r'^2 + r^2)^{3/2} \frac{dd}{ds}$

Signos cambiados

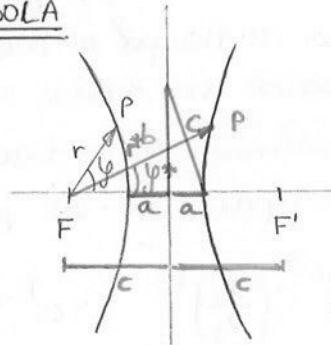
$\left[ \begin{array}{l} \frac{dd}{ds} > 0 \\ F < 0 \end{array} \right.$ 
 Trayectoria **CÓNCAVA**  
 Fuerza **ATRACTIVA**

$\left[ \begin{array}{l} \frac{dd}{ds} < 0 \\ F > 0 \end{array} \right.$ 
 Trayectoria **CONVEXA**  
 Fuerza **REPULSIVA**

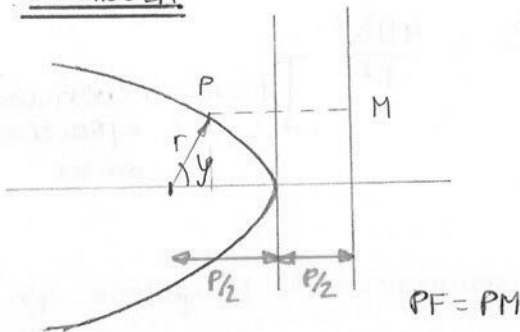
ELIPSE



HIPÉRBOLA



PARÁBOLA



$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{b^2}{a} \text{ parámetro de la órbita} \\ e = \frac{c}{a} \text{ excentricidad de la órbita} \end{array} \right.$$

- Elipse  $\rightarrow e < 1$
- Hiperbola  $\rightarrow e > 1$
- Parábola  $\rightarrow e = 1$
- Circunferencia  $\rightarrow e = 0$

~ Naturaleza de la fuerza cuando la trayectoria es una órbita



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Si  $F < 0$  (atractiva), las trayectorias presentan concavidad hacia el foco

Si  $F > 0$  (repulsiva), las trayectorias presentan convexidad hacia el foco  $\rightarrow$  una rama

1) Si un pto. se mueve verificando la ley de las áreas, está sometido a una fuerza central, y viceversa.

2) Conociendo concavidad o convexidad, podemos decir si la fuerza es atractiva o repulsiva (negativa o positiva)

3) Si la trayectoria es una cónica, la fuerza es newtoniana, y viceversa.

## LEYES DE KEPLER

Los planetas giran en torno al sol describiendo una trayectoria elíptica y el sol se encuentra en uno de sus focos. Como la trayectoria es una cónica, la fuerza que ejerce el sol sobre los planetas es newtoniana y, al ser una elipse, es atractiva.

El vector que va del sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, que verifica la ley de las áreas; por tanto, la fuerza es central.

Si definimos el tiempo de revolución sideral como el tiempo que tarda un planeta en describir una órbita completa en torno al sol, se tiene que para dos planetas, el cuadrado de los tiempos de revolución sideral es proporcional a la distancia que separa a los planetas del sol al cubo.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad F = -\frac{mG^2}{Pr^2} = -\frac{mk}{r^2} \quad k = \frac{G^2}{P}$$

$$k \left\{ \begin{array}{l} G = 2 \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi ab}{T} \\ P = \frac{b^2}{a} \end{array} \right.$$

$$k = \frac{G^2}{P} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 a}{T^2 b} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \quad k' = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \quad \left. \vphantom{\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}} \right\} k = k' \rightarrow \text{Coeficiente atractivo del sol.}$$

Si un cuerpo está sometido a una fuerza newtoniana, la trayectoria que describe es una cónica.

$$F = -\frac{km}{r^2} \quad d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Fdr = -\frac{km}{r^2} dr \rightarrow \frac{1}{2}m d(v^2) = -\frac{km}{r^2} dr$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$r^2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = G \rightarrow dt = \frac{r^2 d\psi}{G}$$

$$\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2k}{rG^2} + \frac{h}{G^2} \rightarrow \left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \left[\frac{1}{r^2} - \frac{2k}{rG^2}\right] + \frac{k^2}{G^4} = \frac{h}{G^2} + \frac{k^2}{G^4}$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{k}{G^2} + \cos\varphi \sqrt{\frac{k^2}{G^4} + \frac{h}{G^2}}}$$

Ecuación de una cónica

Para hallar la ecuación diferencial y que quede todo

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi \rightarrow \frac{1}{p} = \frac{k}{G^2} \Rightarrow \boxed{p = \frac{b^2}{a} = \frac{G^2}{k}}$$

$$\frac{e}{p} = \sqrt{\frac{k^2}{G^4} + \frac{h}{G^2}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{hG^2}{k^2}}}$$

### ~ Energía con una fuerza conservativa

Cuando tenemos un cuerpo sometido a una fuerza central newtoniana, esto implica que sea conservativa, por lo que podemos decir que:

$$E = E_k + E_p$$

$$\vec{F}_{cons} \Rightarrow \exists E_p / \vec{F} = -\text{grad} E_p = -\frac{dE_p}{dr} \rightarrow dE_p = -Fdr = + \frac{K\mu}{r^2} dr$$

$$E_p = -\frac{K\mu}{r} + C \Rightarrow \boxed{E_p = -\frac{K\mu}{r}}$$

Si  $r \rightarrow \infty \rightarrow E_p = 0$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K\mu}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2k}{r} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \boxed{h = \frac{2E}{m}}$$

$$v^2 = \frac{2k}{r} + h$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{hG^2}{k^2}}$$

$$h = \frac{2E}{m}$$

$$F = -\frac{K\mu}{r^2}$$

$k > 0$	$F < 0$	Atractiva
Elipse	$e < 1$	$h < 0$ $E < 0$
Hiperbóla	$e > 1$	$h > 0$ $E > 0$
Parábola	$e = 1$	$h = 0$ $E = 0$
$k < 0$	$F > 0$	Repulsiva
Hiperbóla	$e > 1$	$h > 0$ $E > 0$

$k > 0$   $F < 0$  Atractiva

Traectoria circular:



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

~ Energía potencial efectiva. Estudio de la función  $r = r(t)$

$r = r(t)$   $E_{Pef}$   $F = F(r) \rightarrow \vec{F} = -\text{grad } E_p$   
 $E_p = E(r)$

$d(\frac{1}{2}mv^2) = Fdr = -\frac{dE_p}{dr} \cdot dr \rightarrow d(\frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)) = 0$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) \rightarrow v^2 = \frac{2}{m}(E - E_p(r))$

$r^2 = (\frac{ds}{dt})^2 = \frac{dr^2 + r^2 dy^2}{dt^2}$

$r^2 \frac{dy}{dt} = G \rightarrow dy = \frac{G}{r^2} dt$

$v^2 = (\frac{ds}{dt})^2 + \frac{G^2}{r^2} = \frac{2}{m}(E - E_p(r))$

$(\frac{ds}{dt})^2 = \frac{2}{m} [E - E_p(r) - \frac{mG^2}{2r^2}] \Rightarrow E_{Pef} = E_p(r) + \frac{1}{2}m(\frac{G}{r})^2$

$\frac{2}{m}(E - E_{Pef}(r))$

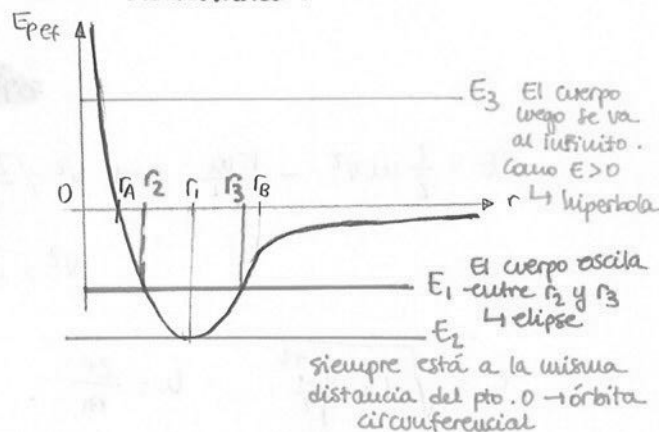
Epotencial Centrifuga  $\cup$  Energía cinética de rotación

$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_{Pef}(r))}} = dt = \frac{r^2}{G} dy \Rightarrow r = r(y)$

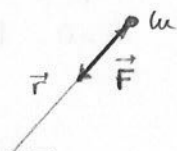
Vamos a aplicarlo al caso de una fuerza newtoniana:

$F \propto \frac{1}{r^2}$   $F = -\frac{k}{r^2}$   $\xrightarrow{\text{se incluye tb la masa}}$   $E_p = -\frac{k}{r}$

$E_{Pef} = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{mG^2}{r^2}$



~ Campo gravitatorio. Ley y constante de gravitación universal



$\vec{F} = -G \cdot \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$

$[G] = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

se trata de una fuerza newtoniana

• Energía potencial

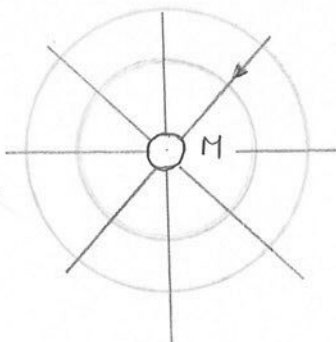
$$\vec{F} = -\text{grad} E_p = -\frac{dE_p}{dr} \rightarrow E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

• Potencial

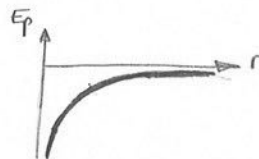
$$\vec{E}_g = \text{grad} V = \frac{dV}{dr} \rightarrow V = -G \frac{M}{r}$$

$$V = \frac{E_p}{m}$$

Una masa genera un pozo de potencial porque todos los valores de la energía van a ser negativos



Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo



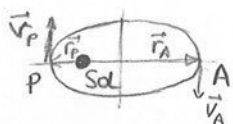
$$E_g = -G \cdot \frac{M}{R^2} = 9,86 \text{ m/s}^2 = g$$

• Velocidad de escape de un cuerpo de la superficie de la Tierra

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{R} = 0 \rightarrow v^2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = 11209 \text{ m/s}$$

Cuestiones

1) La velocidad de un planeta del sistema solar es en el perihelio  $v_p$ . Determinar, utilizando la ley de las áreas, la velocidad del planeta en el afelio como función de  $v_p$  y la excentricidad.



$$|L|_p = |L|_a \rightarrow |\vec{r}_p \times m\vec{v}_p| = |\vec{r}_a \times m\vec{v}_a| \rightarrow r_p v_p = r_a v_a$$

$$v_a = \frac{r_p v_p}{r_a} = \frac{(a-c)}{a+c} v_p = \frac{1-\frac{c}{a}}{1+\frac{c}{a}} v_p \Rightarrow v_a = \frac{1-e}{1+e} v_p$$

2) Determinar la condición que debe cumplir el producto  $r_p v_p^2$  de un cuerpo celeste en la posición más cercana a Sol o perihelio para que la trayectoria sea:

a) Elipse

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



3) un satélite de masa describe una órbita circular de radio  $R$  y periodo  $T$ . Determinar la masa  $M_u$  en función de  $R$ ,  $T$  y  $G$ .

$$\frac{G M_u m_s}{R^2} = m_s a_n = m_s \frac{v^2}{R} \rightarrow M_u = \frac{R}{G} v^2 = \frac{R}{G} \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2 \Rightarrow \underline{\underline{M_u = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}}}$$

Cartagena99

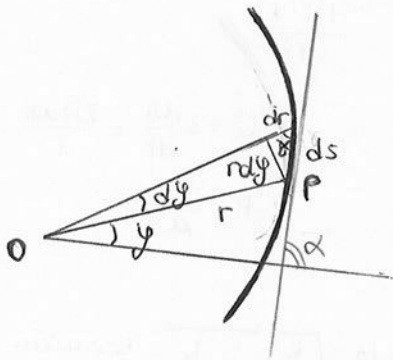
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



TEMA 10 : Movimiento de un punto bajo fuerzas centrales (RESUMEN)



Fuerza central  $\rightarrow \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$

↓  
Traectoria  
CÓNICA

- Elipse ⊖
- Hipérbola ⊕ / ⊖
- Parábola ⊕ / ⊖
- Circunferencia ⊕

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

- $p = \frac{b^2}{a}$  Parámetro de la cónica
- $e = \frac{c}{a}$  Excentricidad de la cónica

• Fuerza central

$$\frac{|\vec{L}_O|}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}| = r \cdot \omega \cdot r \cdot \sin 90^\circ = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_1 \rightarrow \text{constante de las áreas}$$

Velocidad areolar  $\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} C_1 = cte.$

Aceleración central  $\rightarrow$  Aceleración radial  $\rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{u}_\varphi$   
 $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C_1$

Coordenadas

$F(r, t)$

$F(\rho, \varphi) = F(r, \varphi)$

$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_1$  y  $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2}$

$F(r, t) = m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{C_1^2}{r^3} \right)$  y  $F(r, \varphi) = - \frac{m C_1^2}{r^2} \left( \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right)$  Fórmula de BINET

• Concavidad / Convexidad

$$c = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d(\varphi + \arctg(r/r'))}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}} = \frac{d(\varphi + \arctg(r/r'))}{d\varphi \sqrt{r'^2 + r^2}} \Rightarrow \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2r'^2 + r^2 - r \cdot r''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$$

$\frac{d\alpha}{ds} > 0 \Rightarrow$  CÓNCAVA  $\curvearrowright$   $\frac{d\alpha}{ds} < 0 \Rightarrow$  CONVEXA  $\curvearrowleft$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Conc / conv  $\Leftrightarrow$  Ftrac / repl.

# LEYES DE KEPLER

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

$$F = -\frac{mG^2}{Pr^2} = -\frac{mk}{r^2} \rightarrow k = \frac{G^2}{P} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

$$\bullet G = 2 \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi ab}{T}$$

$$\bullet P = \frac{b^2}{a}$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F dr = -\frac{mk}{r^2} dr \Rightarrow v^2 = \frac{2k}{r} + h$$

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2k}{r} + h \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{k}{G^2} + \cos\varphi \sqrt{\frac{k^2}{G^4} + \frac{h}{G^2}}$$

Ecuación de una CÓNICA

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = G \Rightarrow dt$$

$$r = \frac{P}{1 + e \cos\varphi}$$

$$P = \frac{b^2}{a} = \frac{G^2}{k}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{hG^2}{k^2}}$$

## Energía con una fuerza conservativa

$$E = E_c + E_p \quad \int E_p \quad -dE_p = -F dr = +\frac{mk}{r^2} dr \Rightarrow E_p = -\frac{mk}{r}$$

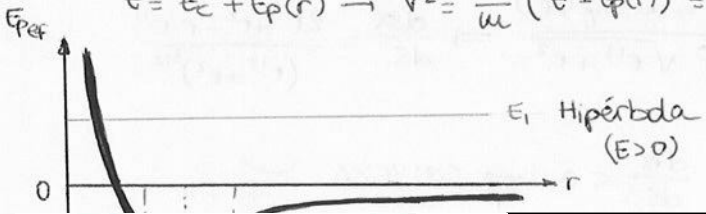
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mk}{r} \rightarrow v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2k}{r} = \frac{2k}{r} + h \Rightarrow h = \frac{2E}{m}$$

$k > 0$	$F < 0$	ATRACTIVA	$k < 0$	$F > 0$	REPULSIVA
Elipse	$e < 1$	$h < 0, E < 0$	Hipérbola	$e > 1$	$h > 0, E > 0$
Hipérbola	$e > 1$	$h > 0, E > 0$	Parábola	$e = 1$	$h = 0, E = 0$

## Energía potencial efectiva

$$E = E_c + E_p(r) \rightarrow v^2 = \frac{2}{m}(E - E_p(r)) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Rightarrow E_{\text{pef}} = E_p(r) + \frac{1}{2}m\left(\frac{G}{r}\right)^2$$

ENERGÍA POTENCIAL EFECTIVA  
Energía cinética de rotación



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



$$\vec{\varphi} = \vec{F} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \hat{u}_r \quad \text{Intensidad} \quad v = -G \frac{M}{r}$$

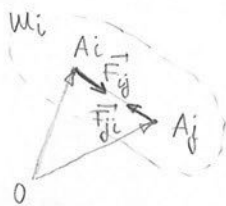
## T11-DINÁMICA DE LOS SISTEMAS (I)

### 1. Magnitudes

Las fuerzas que actúan sobre un pto. material debido a otros puntos del sistema las denominamos fuerzas INTERIORES y las debidas a otros ptos. o elementos ajenos al sistema las llamaremos fuerzas EXTERNAS.

$$P_i \quad m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_{ext,i} + \vec{F}_{int,i} \quad (\text{Las fuerzas son vectores ligados})$$

El conjunto de las fuerzas interiores forma un sistema de vectores nulo, es decir, que tanto la resultante como el momento respecto a un punto deben ser nulos.



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \quad \vec{R}_{int} = \sum_{\text{parejas}} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}$$

(Son fuerzas de acción y reacción)

$$\vec{M}_O = \vec{OA}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{OA}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{A}_j \vec{A}_i \times \vec{F}_{ij}) = 0 \quad (11)$$

### 1. Magnitudes cinéticas

Cantidad de movimiento:  $\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i \rightarrow \vec{p} = \int \vec{v} dm$

$$\begin{cases} dm = \lambda dl \\ dm = \sigma dS \\ dm = \rho dV \end{cases}$$

Momento cinético:  $\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{O,i} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \rightarrow \vec{L}_O = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm$

Energía cinética:  $E_c = \sum E_{c,i} = \frac{1}{2} \sum m_i (\text{cor} \vec{v}_i)^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} \int \text{cor} \vec{v} \cdot dm$

### 2. Teoremas Fundamentales de la Dinámica

#### 1) T. de la cantidad de movimiento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{F}_{ext,i} + \sum \vec{F}_{int,i} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}_{ext}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\frac{d}{dt} (M \vec{v}_c) = \vec{R}_{ext} \Rightarrow \boxed{M \vec{a}_c = \vec{R}_{ext}}$$

3) T. del momento cinético

CENTRAL  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_{ext_i} + \sum \vec{M}_{int_i} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext_i} + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{int_i}$

$$\frac{d}{dt} (\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \left. \begin{array}{l} \text{trabajo} \\ \vec{F}_{ext_i} \end{array} \right\} \boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{ext_O}}$$

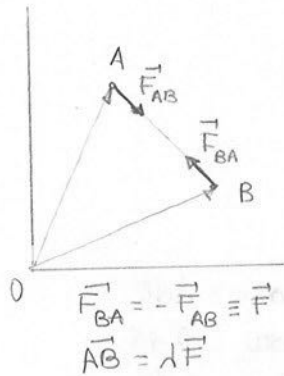
AXICO  $\frac{d(\vec{L}_O \cdot \vec{u})}{dt} = \vec{M}_{ext_O} \cdot \vec{u} \rightarrow \frac{dL_u}{dt} = M_u$

4) T. de la energía cinética

$$dE_c = d\left(\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \sum \vec{F}_{ext_i} \cdot d\vec{r}_i + \sum \vec{F}_{int_i} \cdot d\vec{r}_i \Rightarrow \boxed{dE_c = dZ_{ext} + dZ_{int}}$$

Normalmente  $dZ_{int} \neq 0$ ; solo es 0 si el sistema es indeformable

• Dem.  $dZ_{int} = 0$  en un sist. indeformable



$$\left. \begin{array}{l} dZ_A = \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{OA} \\ dZ_B = \vec{F}_{BA} \cdot d\vec{OB} \end{array} \right\} dZ_A + dZ_B = \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{OA} + \vec{F}_{BA} \cdot d\vec{OB} = (d\vec{OB} - d\vec{OA}) \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot d\vec{AB}$$

Por definición de sistema indeformable,  $\frac{d}{dt} \text{len } \vec{AB} = 0$

$$\frac{d}{dt} \text{len } \vec{AB} = 2 \vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\downarrow \left. \begin{array}{l} \lambda \vec{F} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \\ \lambda \neq 0 \end{array} \right\} \vec{F} \cdot d\vec{AB} = 0$$

$dZ_{int} = dZ_A + dZ_B = 0$

5) T. de la energía cinética para movimientos finitos

$$d\left(\frac{1}{2} \sum m_i \text{len } \vec{v}_i\right) = \sum \vec{F}_{ext_i} \cdot \vec{v}_i dt + \sum \vec{F}_{int_i} \cdot \vec{v}_i dt$$

La variación de la  $E_c$  en un intervalo de tiempo finito va a ser igual al trabajo de las fuerzas exteriores e interiores en ese instante.

$$E_c - E_{c0} = \int_{t_0}^t \sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_i dt + \int_{t_0}^t \sum \vec{F}_{int} \cdot \vec{v}_i dt$$

3. sistema de referencia del centro de masas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$a_i = a_c + a_i$$



Teoremas de KÖNING

• Magnitudes  
 1)  $\vec{p}^* = \sum m_i \vec{v}_i^* = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i^*}_{\text{Momento estático } (=0)} \Rightarrow \boxed{\vec{p}^* = 0}$

2)  $\vec{L}_0 = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum (\vec{r}_c + \vec{r}_i^*) \times m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_i^*)$   
 $\downarrow$   
 $\vec{L}_0 = \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_c + \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_i^* + \sum \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_c + \sum \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^*$   
 $\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{r}_c \times \frac{d}{dt} \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i^*}_0 + \underbrace{(\sum m_i \vec{r}_i^*)}_0 \times \vec{v}_c + \vec{L}^* \Rightarrow \boxed{\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{L}^*}$

3)  $E_c = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \text{nor} \vec{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \text{nor} (\vec{v}_c + \vec{v}_i^*) = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \text{nor} \vec{v}_c + \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \text{nor} \vec{v}_i^* +$   
 $+ \sum \frac{1}{2} \cdot 2 m_i \cdot \vec{v}_c \cdot \vec{v}_i^* \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} M \cdot \text{nor} \vec{v}_c + E_c^*}$   
 $\vec{v}_c \cdot \frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{r}_i^*)$

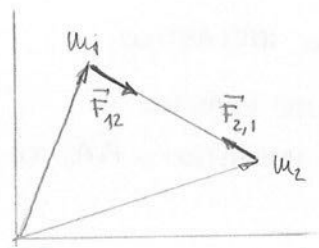
• Teoremas

1)  $\frac{d\vec{p}^*}{dt} = 0$

2)  $\vec{L}^* = \vec{L}_0 - \vec{OC} \times M \vec{v}_c \rightarrow \frac{d\vec{L}^*}{dt} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} - \frac{d\vec{OC}}{dt} \times M \vec{v}_c - \vec{OC} \times M \frac{d\vec{v}_c}{dt}$   
 $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_{ext_0} + \vec{CO} \times \vec{R}_{ext} = \vec{M}_{ext_c} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_{ext_c}}$

3)  $dE_c = dZ_{ext} + dZ_{int} \Rightarrow \boxed{dE_c^* = dZ_{ext}^* + dZ_{int}^*}$

4. Problema de los dos cuerpos . Masa reducida



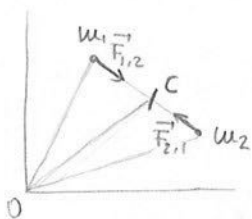
$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_{1,2} \rightarrow \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_{2,1} \rightarrow \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_2} \end{aligned} \right\} \frac{d}{dt} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ---  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \approx m_1$

## Movimiento de estas partículas respecto al centro de masas



$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_C = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_C + \vec{v}_1^* \rightarrow \vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_C = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_1^* = \frac{m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_C + \vec{v}_2^* \Rightarrow \vec{v}_2^* = -\frac{m_1 \vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}$$

Las partículas 1 y 2 se mueven con velocidades de sentidos opuestos observadas desde el centro de masas

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_1^* &= m_1 \vec{v}_1^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{12} = \mu \vec{v}_{12} \\ \vec{p}_2^* &= m_2 \vec{v}_2^* = -\frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{12} = \mu \vec{v}_{12} \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* \Rightarrow \vec{p}^* = 0$$

## 5. Colisiones

Dos partículas colisionan o chocan cuando el momento de ellas se altera. Esto ocurre en un tiempo muy pequeño y solo es debido a la interacción entre las partículas que colisionan. Cuando las partículas que interactúan son las mismas antes y después de la colisión, se trata de una **DISPERSIÓN**

Antes  
 $m_1 \vec{v}_1$   
 $m_2 \vec{v}_2$

Después  
 $m_1' \vec{v}_1'$   
 $m_2' \vec{v}_2'$

Sist. aislado

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \text{cte}}$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

$$dE_C = dE_{\text{ext}} + dE_{\text{int}} \Rightarrow dE_C = dE_{\text{int}}$$

a)  $dE_{\text{int}} = 0 \rightarrow dE_C = 0 \Rightarrow \boxed{E_C = \text{cte}}$  El choque ha sido **ELÁSTICO**

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\frac{v_1 \vec{p}_1}{m_1} + \frac{v_2 \vec{p}_2}{m_2} = \frac{v_1' \vec{p}_1'}{m_1} + \frac{v_2' \vec{p}_2'}{m_2}$$

b)  $\exists dE_{\text{int}} \Rightarrow E_C$  no se conserva  $\rightarrow$  El choque ha sido **INELÁSTICO**

Coefficiente de restitución:  $e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \left\{ \begin{aligned} e = 1 &\rightarrow \text{Choque PERFECTAMENTE ELÁSTICO} \\ e = 0 &\rightarrow \text{Choque TOTALMENTE INELÁSTICO o PLÁSTICO} \end{aligned} \right.$

**Cartagena99**

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

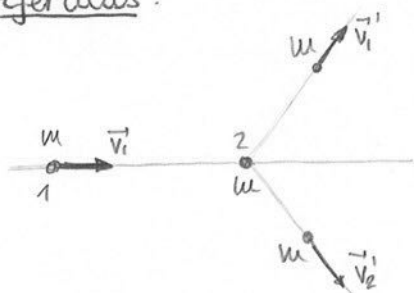
$Q < 0 \rightarrow$  Endoérgica

$Q=0 \quad E_c' = E_c \rightarrow \boxed{\frac{uor \vec{p}_1'}{m_1'} + \frac{uor \vec{p}_2'}{m_2'} = \frac{uor \vec{p}_1}{m_1} + \frac{uor \vec{p}_2}{m_2}}$

$\left. \begin{array}{l} S^* \\ \downarrow \\ \text{sistema} \\ \text{del c.d.u} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{p}_1'^* = -\vec{p}_2'^* \equiv \vec{p}^* \\ \vec{p}_1'^* = -\vec{p}_2'^* \equiv \vec{p}^* \end{array} \left. \right\} \left( \frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'} \right) uor \vec{p}^* = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) uor \vec{p}^*$

$\downarrow$   
 $\boxed{\frac{uor \vec{p}'^*}{\mu'} = \frac{uor \vec{p}^*}{\mu}}$       Dispersión:  $\mu' = \mu$   
 $uor \vec{p}'^* = uor \vec{p}^*$

Ejercicios



1) En la figura se presenta un choque perfectamente elástico con una masa  $m_1$  y otra de la misma masa pero en reposo. La primera partícula tiene una velocidad  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}$ . A partir de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, demostrar que  $v_1'$  y  $v_2'$ , que no son nulos, forman un ángulo  $\phi$  igual a  $\pi/2$

$\bullet \vec{p} = cte \rightarrow m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' \rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$   
 $\bullet E_c = cte \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$   
 (uor  $\vec{v}_1 = uor \vec{v}_1' + uor \vec{v}_2'$ )

$uor(\vec{v}_1' + \vec{v}_2') = uor \vec{v}_1' + uor \vec{v}_2' \rightarrow uor \vec{v}_1' + uor \vec{v}_2' + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = uor \vec{v}_1' + uor \vec{v}_2'$

$2v_1'v_2' \cos \phi = 0 \rightarrow \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

2) En la figura se representa una partícula  $m = m_1$  cuya velocidad es  $\vec{v}_1 = 8\vec{u}$  y otra partícula  $m = m_2$  que está en reposo. Si después del choque elástico,  $\vec{v}_1' = 2\vec{u} + \lambda\vec{j}$ , determinar  $\lambda$  y  $\vec{v}_2'$ .

$\bullet \vec{p} = cte \Rightarrow m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' \rightarrow 8\vec{u} = 2\vec{u} + \lambda\vec{j} + \vec{v}_2' \rightarrow \vec{v}_2' = 6\vec{u} - \lambda\vec{j}$   
 $\bullet E_c = cte \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \rightarrow 64 = 4 + \lambda^2 + v_2'^2$   
 $\hookrightarrow 64 = 4 + \lambda^2 + 36 + \lambda^2 \rightarrow 2\lambda^2 = 24 \Rightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{3}$   
 $\vec{v}_2' = 6\vec{u} - 2\sqrt{3}\vec{j}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background that has a subtle, abstract shape. Below the text, there is a horizontal orange bar that tapers at both ends, resembling a shadow or a base.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

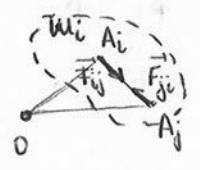
---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



TEMA 11 : Dinámica de los sistemas (I)  
(RESUMEN)

$$P_i \rightarrow m_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_{ext_i} + \vec{F}_{int_i}$$



$$\sum \vec{F}_{int} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \rightarrow \vec{R} = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_{int} = \sum_{\text{pares}} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}$$

(Fuerzas acción/reacción)

$$\vec{M}_O = \vec{OA}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{OA}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{A}_j \vec{A}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

• Magnitudes cinéticas

1) Cantidad de movimiento:  $\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i \quad \parallel \quad \vec{p} = \int \vec{v} dm$

$$dm = \begin{cases} \lambda dl \\ \sigma ds \\ \rho dv \end{cases}$$

2) Momento cinético:  $\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{O_i} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad \parallel \quad \vec{L}_O = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm$

3) Energía cinética:  $E_c = \sum E_{c_i} = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \underbrace{v_i^2}_{v_i^2} \quad \parallel \quad E_c = \frac{1}{2} \int \rho v^2 dm$

• Teoremas de la Dinámica

1) Tma. cantidad de movimiento:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}_{ext}$

Tma. centro de masas:  $M \vec{a}_C = \vec{R}_{ext}$

2) Tma. momento cinético

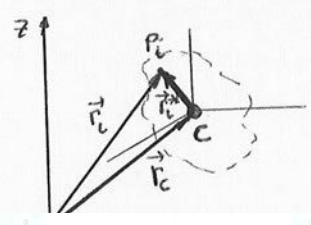
- Central  $\rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_{ext_O}$
- Áxico  $\rightarrow \frac{dL_u}{dt} = M u$

3) Tma. energía cinética:  $dE_c = dE_{ext} + dE_{int} \quad (dE \equiv \text{trabajo})$

Tma.  $E_c$  para movimientos finitos:  $E_c - E_{c0} = \int_{t_0}^t \sum \vec{F}_{ext_i} \cdot \vec{v}_i dt + \int_{t_0}^t \sum \vec{F}_{int_i} \cdot \vec{v}_i dt$

"O SOLO en sist INDEFORMABLE"

Sistema de referencias del centro de masas:  $S^*$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i^* \quad \parallel \quad \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i^* \quad \parallel \quad \vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}_i^*$$

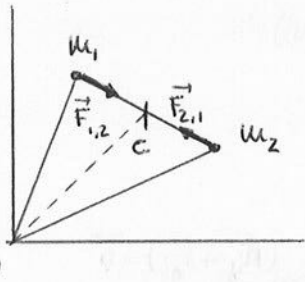


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Masa reducida



$$\vec{F} = \mu \cdot \frac{d\vec{v}_{1,2}}{dt} \quad \text{siendo} \quad \mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad \left( \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

↓  
masa reducida

$$\boxed{\text{C.d.M.}} \quad \left. \begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_c + \vec{v}_1^* \rightarrow \vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{m_2 \vec{v}_{1,2}}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_c + \vec{v}_2^* \rightarrow \vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = -\frac{m_1 \vec{v}_{1,2}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{p}_1^* &= \vec{p}_2^* \\ \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* &= 0 \end{aligned}$$

## Colisiones

Antes :  $m_1, \vec{v}_1$   
 $m_2, \vec{v}_2$

Después :  $m_1', \vec{v}_1'$   
 $m_2', \vec{v}_2'$

Sist. aislado  $\rightarrow \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = ck \rightarrow \vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$

$$\rightarrow dE_c = dE_{ext} + dE_{int} \Rightarrow dE_c = dE_{int}$$

$$\left\{ \begin{aligned} dE_{int} = 0 &\rightarrow E_c = ck \Rightarrow \text{Choque ELÁSTICO} \quad \rightsquigarrow e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} = 1 \\ dE_{int} \neq 0 &\rightarrow E_c \neq ck \Rightarrow \text{Choque INELÁSTICO} \quad \rightsquigarrow e = 0 \end{aligned} \right.$$

Calor de reacción  $\rightarrow Q = E_c' - E_c$

$Q > 0$  : exoérgica  
 $Q = 0$  : elástica  
 $Q < 0$  : endoérgica

Si  $Q = 0 \rightarrow E_c' = E_c \Rightarrow \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$

$$\boxed{\text{C.d.M.}} \quad \begin{aligned} \vec{p}_1^* &= -\vec{p}_2^* = \vec{p}^* \\ \vec{p}_1^* &= -\vec{p}_2^* = \vec{p}^* \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 v_1'^2}{\mu} = \frac{m_1 v_1^2}{\mu}$$

Dispersión :  $\mu' = \mu \rightarrow m_1 v_1'^2 = m_1 v_1^2$   
 $m_1' = m_1$   
 $m_2' = m_2$

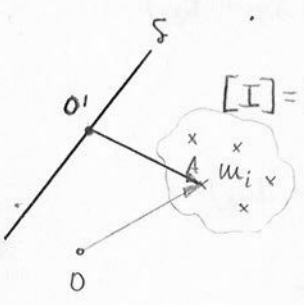
# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

T12 - DINÁMICA DE LOS SISTEMAS (II)



1. Momentos de inercia centrales, áxicos y planarios. Relaciones entre ellos

$[I] = M \cdot L^2$

~ Central o respecto de un punto  $I_O = \sum m_i \cdot \text{nor } \vec{OA} = \sum m_i \cdot \text{nor } \vec{r}_i$

~ Áxico o respecto de un eje  $I_S = \sum m_i \cdot \text{nor } [(\vec{u} \times \vec{r}_i) \times \vec{u}]$

~ Planario o respecto de un plano  $I_\Pi = \sum m_i (\vec{u} \cdot \vec{r}_i)^2$

Si se trata de un sistema de masa continuo:

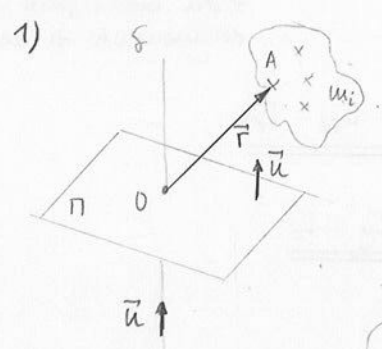
$I_O = \int \text{nor } r^2 \, dm$        $I_S = \int \text{nor } [(\vec{u} \times \vec{r}) \times \vec{u}] \, dm$        $I_\Pi = \int \text{nor } (\vec{u} \cdot \vec{r})^2 \, dm$

→ Cambio de definición del momento de inercia de una recta

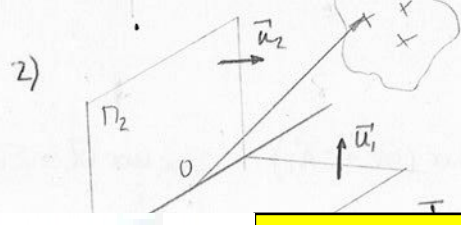
$\text{nor } (\vec{a} \times \vec{b}) = \text{nor } \vec{a} \cdot \text{nor } \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$  siendo  $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{r}_i$  y  $\vec{b} = \vec{u}$

$I_S = \sum m_i \left[ \text{nor } (\vec{u} \times \vec{r}_i) \cdot \text{nor } \vec{u} - [(\vec{u} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{u}]^2 \right] \Rightarrow I_S = \sum m_i \cdot \text{nor } (\vec{u} \times \vec{r}_i)$   
 $I_S = \int \text{nor } (\vec{u} \times \vec{r}) \, dm$

→ Relación entre ellos



$I_S = \sum m_i \cdot \text{nor } (\vec{u} \times \vec{r}_i) = \sum m_i [\text{nor } \vec{u} \cdot \text{nor } \vec{r}_i - (\vec{u} \cdot \vec{r}_i)^2]$   
 $I_S = \frac{\sum m_i \cdot \text{nor } \vec{r}_i}{I_O} - \frac{\sum m_i (\vec{u} \cdot \vec{r}_i)^2}{I_\Pi} \Rightarrow \boxed{I_O = I_S + I_\Pi}$



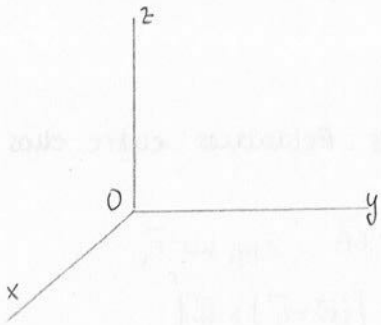
$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$   
 $I_S = \sum m_i \cdot \text{nor } (\vec{u} \times \vec{r}_i) = \sum m_i \cdot \text{nor } [(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \times \vec{r}_i]$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**  
 ...  
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$I_S = \sum m_i (\vec{u}_1 \cdot \vec{r}_i)^2 + \sum m_i (\vec{u}_2 \cdot \vec{r}_i)^2 \Rightarrow \boxed{I_S = I_{\Pi_1} + I_{\Pi_2}}$  siendo  $\Pi_1 \perp \Pi_2$  y  $S$  la recta intersección

→ Triedro cartesiano



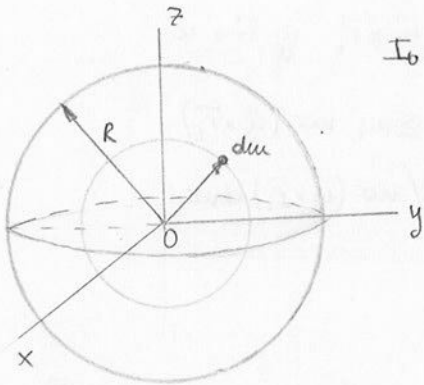
$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 = I_x + I_{yz} \\ I_0 = I_y + I_{zx} \\ I_0 = I_z + I_{xy} \end{array} \right\} \quad 3I_0 = (I_x + I_y + I_z) + (I_{xy} + I_{yz} + I_{zx})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x = I_{yz} + I_{xy} \\ I_y = I_{xy} + I_{yz} \\ I_z = I_{yz} + I_{zx} \end{array} \right\} \quad I_x + I_y + I_z = 2(I_{xy} + I_{yz} + I_{zx})$$

$$\boxed{I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)}$$

Ej: Calcular el momento de inercia de una esfera maciza respecto a su centro, respecto a un eje diametral y respecto a un plano diametral.



$I_0, I_x, I_{xy}?$

$$I_0 = \int \rho r^2 dm = \int r^2 dm \quad \left\{ \begin{array}{l} I_0 = \rho \int_0^R 4\pi r^4 dr = 4\pi\rho \frac{R^5}{5} \\ dm = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \end{array} \right.$$

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow I_0 = \frac{3}{5} MR^2$$

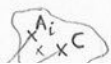
No sabemos si el coeficiente está bien, pero sí la dimensión del momento de inercia

$$I_0 = 3I_{xy} \rightarrow I_{xy} = \frac{1}{3} I_0 \Rightarrow \underline{\underline{I_{xy} = \frac{1}{5} MR^2 = I_{yz} = I_{zx}}}$$

$$I_0 = \frac{3}{2} I_x \rightarrow I_x = \frac{2}{3} I_0 \Rightarrow \underline{\underline{I_x = \frac{2}{5} MR^2 = I_y = I_z}}$$

2. Teoremas de Steiner

1º-  $I_0, I_C$



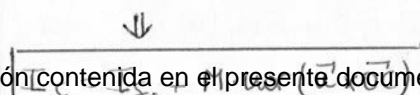
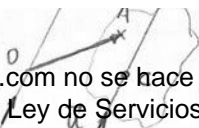
$$I_0 = \sum m_i \cdot \text{nor } \vec{OA}_i = \sum m_i \cdot \text{nor } (\vec{OC} + \vec{CA}_i) = \sum m_i \text{nor } \vec{OC} + \underbrace{\sum m_i \cdot \text{nor } \vec{CA}_i}_{I_C}$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

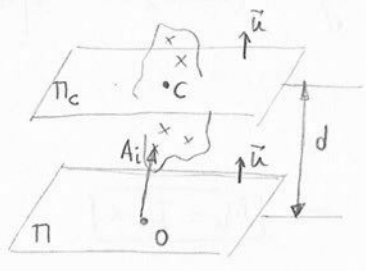
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



$$\vec{u} \times \vec{c} = |\vec{u}| |\vec{c}| \sin \theta$$

3º-  $I_n, I_{nc} \quad n // n_c$



$$I_n = \sum m_i \cdot (\vec{u} \cdot \vec{OA}_i)^2 = \sum m_i [\vec{u} \cdot (\vec{OC} + \vec{CA}_i)]$$

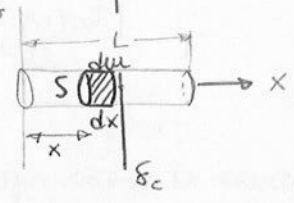
$$I_n = I_{nc} + M(\vec{u} \cdot \vec{OC})^2 \Rightarrow \boxed{I_n = I_{nc} + Md^2}$$

↓  
distancia entre los planos  $\pi$  y  $\pi_c$

Dado un sistema de masas, calcular el momento de inercia mínimo respecto de un punto  $\Rightarrow$  se calcula respecto al centro de masas.

que posee una masa  $m$

Ej. 1) Calcular el momento de inercia de una barra homogénea de sección  $S$  y longitud  $L$  respecto de una recta que pasa por uno de los extremos y es perpendicular a la barra.



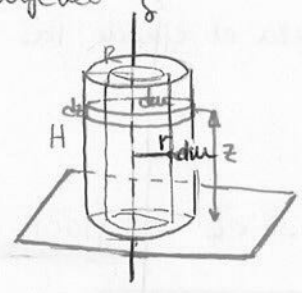
$$I_S = \int x^2 dm = \rho S \int_0^L x^2 dx = \rho S \cdot \frac{L^3}{3}$$

$$dm = \rho dv = \rho S dx$$

$$M = \rho V = \rho SL \rightarrow \underline{I_S = \frac{1}{3} ML^2}$$

$$I_{S_c}?: \quad I_S = I_{S_c} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow I_{S_c} = \frac{1}{3} ML^2 - \frac{1}{4} ML^2 \Rightarrow \underline{I_{S_c} = \frac{1}{12} ML^2}$$

2) Calcular el momento de inercia respecto del eje de rotación del cilindro macizo y homogéneo



$$I_S = \int r^2 dm = \rho 2\pi H \int_0^R r^3 dr = \rho \cdot 2\pi H \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$dm = \rho dv = \rho 2\pi r H dr$$

$$M = \rho V = \rho \pi R^2 H \Rightarrow \underline{I_S = \frac{1}{2} MR^2}$$

$$\left. \begin{aligned} I_n &= \int z^2 dm \\ dm &= \rho dv = \rho \pi R^2 dz \end{aligned} \right\} I_n = \rho \pi R^2 \int_0^H z^2 dz = \rho \pi R^2 \frac{H^3}{3} \Rightarrow \underline{I_n = \frac{1}{3} MH^2}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho r^2 \vec{\omega} \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2} \int \rho r^2 (\omega \vec{u} \times \vec{r}) \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2} \omega^2 \int \rho r^2 d\vec{u} \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} I_u \omega^2}$$

Ec. Fundamental del mov. de rotación del sólido rígido

$$\frac{dL_u}{dt} = M_u \rightarrow \frac{dI_u}{dt} \omega + I_u \frac{d\omega}{dt} = M_u \Rightarrow \boxed{M_u = I_u \alpha}$$

$\swarrow$  0 porque  $I_u = \text{cte}$

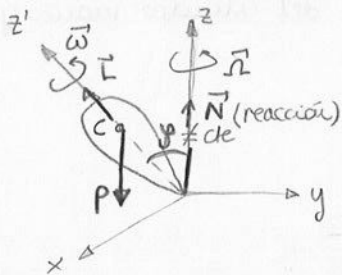
$$L_u \begin{cases} \vec{L}_o \cdot \vec{u} \\ \vec{L}_c \cdot \vec{u} \end{cases}$$

Supongamos que la única fuerza externa que actúa sobre el sólido rígido es su peso. La recta soporte del peso pasa por el centro de masas y, por tanto,  $\vec{M}_c = 0$

$$\vec{M}_c = 0 \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_c \cdot \vec{u} = M_u = 0 \rightarrow \frac{dL_u}{dt} = 0 \Rightarrow L_u = \text{cte} \quad I_u |\omega| = \text{cte} \\ \vec{M}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L}_c = \text{cte} \end{array} \right. \begin{cases} I_u = \text{cte} \quad \omega = \text{cte} \\ I_u \neq \text{cte} \quad \omega \neq \text{cte} \\ \text{(Patiada)} \end{cases}$$

$\vec{L} = I \vec{\omega} \rightarrow$  solo válido cuando el sólido rígido tiene al menos tres direcciones perpendiculares entre sí, llamadas ejes principales de inercia, y el eje en torno al que gira pasa por el centro de masas

EJE NO FIJO (Pezúa)



Cuando el eje no permanece fijo, estamos ante un movimiento filoscópico.

El movimiento de precesión es el que realiza el eje de la pezúa y su eje en torno al eje z.

$$\vec{M} = \vec{OC} \times (-mg\vec{k}) = mg\vec{k} \times \vec{OC}$$

En torno a z'

$$mg\vec{k} \times \vec{OC} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \rightarrow mg|\vec{OC}| = |\omega\vec{\Omega}| |\vec{L}|$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

En torno a z

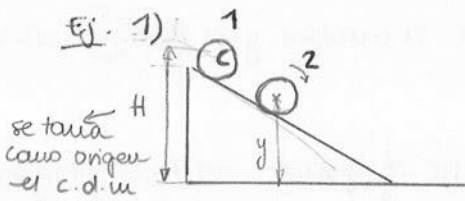
$$\boxed{\Omega = \frac{mg|\vec{OC}|}{L} = \frac{mg|\vec{OC}|}{I|\omega|}} \quad \omega \gg \Omega$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



• Calcular la velocidad en cualquier posición del plano inclinado y cuando haya tocado el suelo.

Para cualquier punto:

1:  $E_p = Mgh$

2:  $E_p + E_c = Mgy + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_c^2$   
 $v = \omega R; \omega = \frac{v}{R}$

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \ominus Mgh = Mgy + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} MR^2 \right) \left( \frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} Mv_c^2$   
 TA conserv. de la E :  $E_1 = E_2$   
 ESFERA

$g(H-y) = \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) v_c^2 \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{10}{7} g(H-y)}$

Independiente de cualquier esfera que se utilice.

Cuando ya ha llegado al suelo,  $y=0 \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{10}{7} gH}$  velocidad de deslizamiento

• Si la esfera no desliza:

$E_p = E_c \rightarrow Mgh = \frac{1}{2} Mv_c^2 \Rightarrow v_c = \sqrt{2gH}$  velocidad de rodadura

2) ¿Quién llega antes al final del plano? Tenemos un aro fino, una canica, una batería sólida cilíndrica, una lata vacía de sopa, otra llena, y, además, una caja engrasada que desliza sin rozamiento.

$Mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_c^2 = \frac{1}{2} (kMR^2) \frac{v_c^2}{R^2} + \frac{1}{2} Mv_c^2 \rightarrow gh = \frac{1}{2} (k+1) v_c^2$   
 Si  $k \uparrow, v \downarrow$

Aro:  $k=1$  pq  $I=MR^2$

Canica:  $k = \frac{2}{5}$  pq  $I = \frac{2}{5} MR^2$   
 → Esfera

Batería:  $k = \frac{1}{2}$  pq  $I = \frac{1}{2} MR^2$   
 ↓ Cilindro

$v_{aro} < v_{batería} < v_{canica}$

$v_{lata vacía} < v_{lata llena}$

Es como un aro pero con más masa

→ El fluido no es homogéneo, no como en la batería que sí lo es

3) Un cilindro macizo homogéneo de radio R está rodando sin deslizar por un plano inclinado un ángulo  $\theta$ . Calcular la aceleración de traslación del cilindro



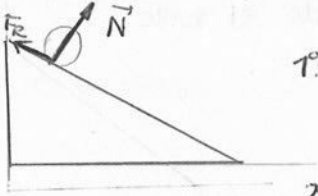
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

En torno al EIR:  $\tau = \tau_A \alpha \rightarrow R M g \text{ sen } \theta = \left( \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 \right) \alpha = \frac{3}{2} MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{2}{3} g \text{ sen } \theta$   
 Steiner:  $I_B = I + Md^2$

Determinar la fuerza de rozamiento mínima entre el cilindro y el plano necesaria para asegurar que no hay deslizamiento



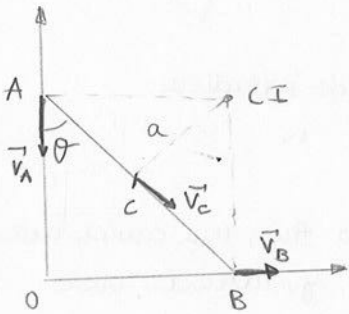
$$1. - M_c = I_c \alpha \rightarrow F_r R = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} M R \cdot \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \underline{F_r = \frac{1}{3} M g \operatorname{sen} \theta}$$

$$2. - M g \operatorname{sen} \theta - F_r = M a \rightarrow F_r = M (g \operatorname{sen} \theta - a) = M (g \operatorname{sen} \theta - \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \theta)$$

$$\Downarrow \\ \underline{F_r = \frac{1}{3} M g \operatorname{sen} \theta}$$

4) Una barra homogénea de longitud  $2a$  y masa  $m$  se mueve apoyándose en dos ejes ortogonales  $OXY$ .

- Hallar la cantidad de movimiento en función de  $\theta$  y  $\dot{\theta}(\omega)$
- Calcular el momento cinético de la barra respecto al origen
- Calcular la energía cinética de la barra



$$a) \vec{p} = M \vec{v}_c \quad \left. \begin{array}{l} v_c = \omega a = \dot{\theta} a \end{array} \right\} \underline{\vec{p} = M a \dot{\theta}}$$

$$b) \vec{L}_0 = \vec{L}^* + \vec{OC} \times M \vec{v}_c$$

$$\vec{L}^* = I_c \vec{\omega} = \frac{1}{12} M L^2 \omega \vec{k} = \frac{1}{12} M (2a)^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{OC} = a \cdot \cos(90^\circ - \theta) \vec{i} + a \operatorname{sen}(90^\circ - \theta) \vec{j} = a \operatorname{sen} \theta \vec{i} + a \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{OC}}{dt} = a \dot{\theta} \cos \theta \vec{i} + a \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \vec{j}$$

$$\vec{L}_0 = \frac{1}{12} M (4a^2) \dot{\theta} \vec{k} + M \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \operatorname{sen} \theta & a \cos \theta & 0 \\ a \dot{\theta} \cos \theta & -a \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta & 0 \end{vmatrix} = \left[ \frac{1}{3} M a^2 \dot{\theta} + M \underbrace{(-a^2 \dot{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta - a^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta)}_{-a^2 \dot{\theta}} \right] \vec{k}$$

$$\Downarrow \\ \underline{\vec{L}_0 = \left(\frac{1}{3} - 1\right) M a^2 \dot{\theta} = -\frac{2}{3} M a^2 \dot{\theta} \vec{k}}$$

$$c) \underline{E_c} = E_c^* + \frac{1}{2} M v_c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M a^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1\right) M \omega^2 a^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3} M a^2 \dot{\theta}^2}}$$

$$E_c^* = \frac{1}{2} I_c \omega^2 \rightarrow I_c = \frac{1}{12} M L^2 = \frac{1}{12} M (2a)^2 = \frac{1}{3} M a^2$$

Cartagena99

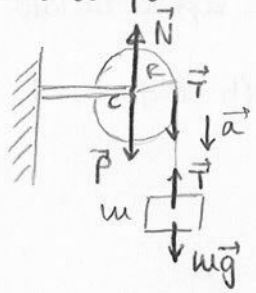
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



5) Se sujeta un objeto de masa  $m$  a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de momento de inercia  $I$  y radio  $R$ . La rueda puede girar sin rozamiento y la cuerda no desliza por su borde. Hallar la tensión de la cuerda y la aceleración del cuerpo.

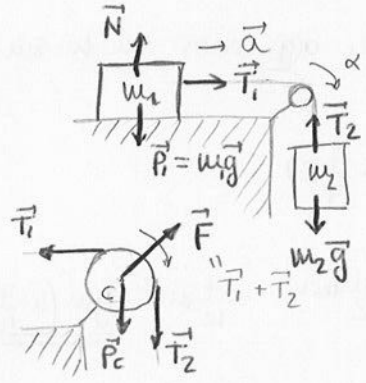


$$\left. \begin{aligned} mg - T &= ma \\ M &= I\alpha \rightarrow TR = I\alpha \\ \text{momento} \quad a &= \alpha R \end{aligned} \right\}$$

$$a = \frac{mgR^2}{mR^2 + I}$$

$$T = \frac{mgI}{mR^2 + I}$$

6) Dos bloques están conectados por una cuerda que pasa por una polea de radio  $R$  y momento de inercia  $I$ . El bloque de masa  $m_1$  desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El bloque de masa  $m_2$  está suspendido de la cuerda. Determinar la aceleración de los bloques y las tensiones  $T_1$  y  $T_2$  suponiendo que la cuerda no desliza sobre la polea.



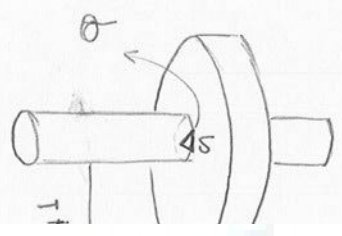
$$\left. \begin{aligned} T_1 &= m_1 a \\ T_2 - m_2 g &= m_2 a \\ T_2 \cdot R - T_1 \cdot R &= I\alpha \\ a &= \alpha R \end{aligned} \right\}$$

$$a = \frac{m_2 g R^2}{I + R^2(m_1 + m_2)}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g R^2}{I + R^2(m_1 + m_2)}$$

$$T_2 = \frac{m_2 g (I + R^2 m_1)}{I + R^2(m_1 + m_2)}$$

7) El volante se pone en rotación mediante un peso de masa  $m$ . Nos dan el momento de inercia total (volante + eje)  $I$  y el momento de las fuerzas resistentes de los cojinetes de apoyo. Calcular el valor de la aceleración angular de la rueda y la velocidad angular cuando el peso ha descendido una altura  $h$  desde el reposo.



$\alpha, \omega?$

$$[\alpha] \rightarrow \alpha = \frac{M_p - mgR}{I + mR^2} = \text{cte.}$$

$$[\omega] \rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \omega_0 = 0 \text{ rad/s}$$

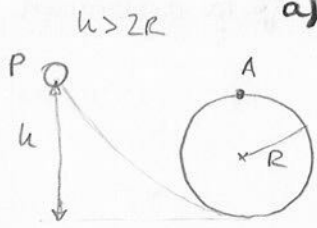
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

8) Un bloque desliza sin rozamiento por una vía en forma de lazo. El lazo circular tiene un radio  $R$  y el bloque parte de un punto  $P$  a una altura  $h$  por encima de la parte inferior del lazo.



a) Energía cinética del bloque cuando alcanza la parte superior de lazo

$$E(P) = E(A) \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \rightarrow v^2 = 2g(h - 2R)$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \underline{\underline{mg(h - 2R) = E_c(A)}}$$

b) Admitiendo que no se sale de la vía, hallar la aceleración en  $A$

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \underline{\underline{\frac{2g}{R}(h - 2R)}}$$

c) Obtener el valor mínimo de  $h$  para que el bloque alcance el pto.  $A$  sin salirse de la vía.

$$mg = m \frac{v^2}{R} \rightarrow v^2 = gR = 2g(h - 2R) \Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{5}{2}R}}$$

Supongamos que ahora tenemos una esfera de radio  $R_1 = R/4$  con centro en  $h$  sin deslizamiento. Calcular lo mismo.

$$d) mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 + mg(2R - \frac{R}{4}) \rightarrow v_c^2 = \frac{10}{7}g(h - \frac{7}{4}R)$$

$$I = \frac{2}{5}MR_1^2 = \frac{2}{5}M(\frac{R}{4})^2 = \frac{1}{40}MR^2$$

$$\omega = \frac{v_c}{R_1} = \frac{4v_c}{R}$$

$$\downarrow$$

$$E_c(A) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 = \frac{7}{10}Mv_c^2 = \underline{\underline{gM(h - \frac{7}{4}R)}}$$

$$e) a = a_N = \frac{v_c^2}{R''} = \frac{40}{21} \cdot \frac{g}{R} (h - \frac{7}{4}R)$$

$$\hookrightarrow R'' = \frac{3}{4}R = R - R_1$$

$$f) mg = m \frac{v_c^2}{R''} \rightarrow v_c^2 = g \frac{3}{4}R = \frac{10}{7}g(h - \frac{7}{4}R) \Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{91}{40}R}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

TEMA 12 : Dinámica de los sistemas (II) (RESUMEN)

MOMENTOS DE INERCIA :  $[I] = ML^2$

- Central  $\rightarrow I_0 = \sum m_i \cdot \omega^2 r_i^2 \quad // \quad I_0 = \int \omega^2 r^2 dm$
- Áxico  $\rightarrow I_S = \sum m_i \cdot \omega^2 [(\vec{u} \times \vec{r}_i) \times \vec{u}] = \sum m_i \cdot \omega^2 (\vec{u} \times \vec{r}_i) \quad // \quad I_S = \int \omega^2 (\vec{u} \times \vec{r}) dm$
- Planario  $\rightarrow I_n = \sum m_i (\vec{u} \cdot \vec{r}_i)^2 \quad // \quad I_n = \int (\vec{u} \cdot \vec{r})^2 dm$

~ Relaciones :  $I_0 = I_S + I_n$

$I_S = I_{n1} + I_{n2} \rightarrow n_1 \perp n_2$  y  $S \equiv$  recta intersección

Triedro cartesiano  $\begin{cases} I_0 = I_{x1} + I_{y2} + I_{z3} \\ I_0 = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z) \end{cases}$

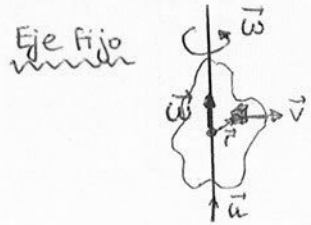
• Teoremas de Steiner

$I_0 = I_c + M \omega^2 r_c^2$

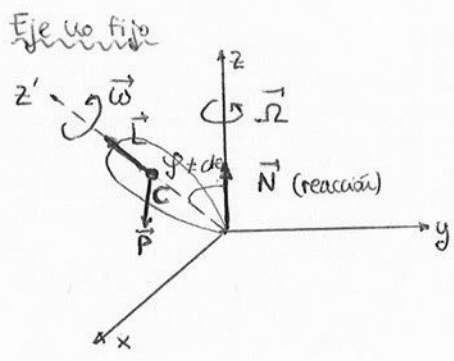
$I_S = I_{Sc} + M \omega^2 (\vec{u} \times \vec{oc}) \quad S // S_c$

$I_n = I_{nc} + M d^2 \quad d: \text{distancia entre } n \text{ y } n_c, n // n_c$

• Dinámica del sólido rígido



$L_u = I_u |\vec{\omega}|$   
 $E_c = \frac{1}{2} I_u \omega^2$   
 $M_u = I_u \alpha$



$\vec{N} = \frac{mg |\vec{oc}|}{I \omega} \vec{k}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a yellow-bordered box.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# T13 - MEDIOS DEFORMABLES (I)

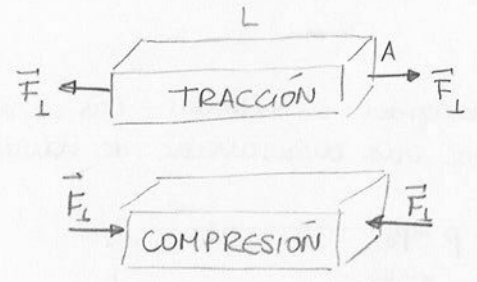
## ~ Sólidos

Decimos que un sistema es elástico cuando al actuar una fuerza deformadora cambia su forma. Si al cesar la fuerza deformadora, recupera su forma original, se dice que es elástica; si por el contrario, no la recupera se denomina inelástico o plástico.

Cuando la deformación es pequeña respecto a su forma original, dicha deformación es proporcional a la fuerza deformadora. Cuando además sigue trayectoria recta, ~~continúa~~ <sup>se cumple</sup> la ley de Hooke :  $F = -k\Delta L$

- Causa deformadora, representada normalmente por la tensión
- Deformación producida
- Módulo de elasticidad, cociente entre la causa y el efecto (deformación)

### 1) Elasticidad por tracción y compresión



Módulo de Young :  $E \equiv Y \rightarrow E = \frac{F_L}{\frac{\Delta L}{L_0} \cdot A}$    
sección sobre la que se aplica la fuerza  
deformación relativa

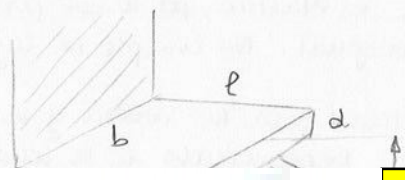
$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= L - L_0 \\ \frac{\Delta L}{L_0} &= \frac{L - L_0}{L_0} \end{aligned} \right\} \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_L}{A}$$

si la sección no es cuadrada, rectangular o triangular, se tiene en cuenta el radio :

$$\nu = - \frac{\Delta r / r_0}{\Delta L / L_0}$$

Coefficiente de Poisson  $\rightarrow$  establece la relación entre la variación relativa de la varilla y del radio.

### 2) Elasticidad por flexión



$$s = \frac{4F}{E} \cdot \frac{l^3}{b \cdot d^3}$$



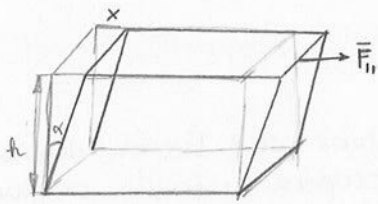
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

### 3) Elasticidad por cizalladura

Le ocurre a un sólido sometido a una fuerza tangente (1)



La deformación no lleva implícito la variación de volumen, es decir, la conserva

$$G = \frac{F_{||}/A}{\alpha}$$

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{x}{h}$$

### 4) Elasticidad por torsión

No hay variación de volumen y está originada por un momento



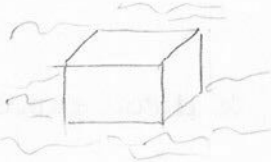
$$R = \frac{M}{\alpha}$$

↓  
Coeficiente de torsión

M: causa de la deformación

### 5) Elasticidad en volumen

La presentan sólidos que están sumergidos en fluidos. Las caras están sometidas a la presión del líquido y se produce una disminución de volumen.



$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0}$$

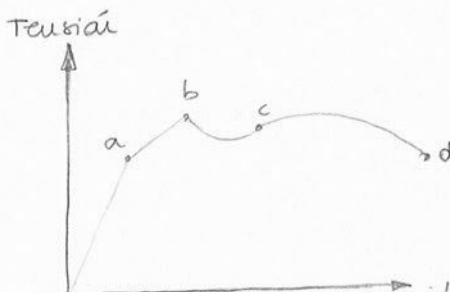
↓  
Coeficiente de volumen

siendo  $\Delta p = p - p_0$

$$\frac{\Delta V}{\Delta V_0} = \frac{V - V_0}{V_0}$$

$$1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$K = \frac{1}{B} = -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}$$



(0, a) → El cuerpo es elástico y cumple la ley de Hooke

(a, b) → El cuerpo todavía es elástico, por lo que puede volver a su forma original. No cumple la ley de Hooke.

(b, d) → Deformación plástica; cesa la fuerza y no vuelve a su forma original. Dependiendo de la longitud,

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

**Cartagena99**

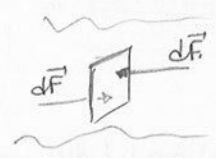
~ Fluidos

→ Hidrostatica o estatica de fluidos

Cuando un fluido está en reposo, la fuerza que ejerce el fluido sobre las paredes del recipiente es perpendicular



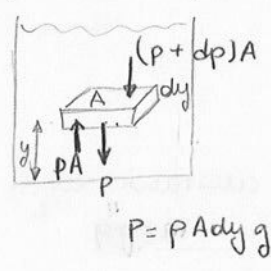
El fluido está en reposo pero las moléculas no, por lo que aparece una fuerza que no es  $\perp$ .



$P = \frac{dF}{dA}$  si  $F = dF \rightarrow P = \frac{F}{A}$

La PRESIÓN es un ESCALAR, nunca un vector.

Ahora vamos a encontrar la ecuación fundamental de un fluido en reposo incompresible.



$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow P A - (P + dp) A - P g A dy = 0 \rightarrow \frac{dp}{dy} = - P g$

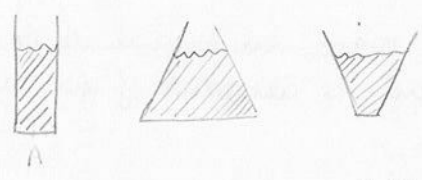
$dp = - P g dy$

$P_2 - P_1 = - P g (y_2 - y_1) = P g (y_1 - y_2) \Rightarrow P_2 - P_1 = P g h$

A mayor profundidad, mayor presión

si  $P_1 = P_0 \Rightarrow \underline{P = P_0 + P g h}$  Ec. Fundamental

Ej. ¿Cuál tiene mayor presión en el fondo?



La presión en un punto no depende del volumen de fluido. Solo depende del peso del fluido, es decir, que tengan el mismo nivel de fluido

Paradoja de la Hidrostatica

→ Ley de Pascal

La presión ejercida sobre un punto del fluido se transmite por igual a todos los puntos del fluido.



$A_1 \ll A_2$



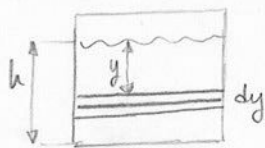
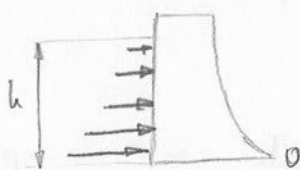
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
...  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ej. Una presa rectangular soporta una masa de agua que alcanza una altura  $h$ .

a) Determinar la fuerza horizontal sobre la presa.

b) El momento en torno al pto. 0

c) La altura a la cual la fuerza resultante tendrá que actuar para producir el mismo momento.



a)  $dF = p dA = \rho g y L dy$  No hemos puesto la presión atmosférica porque se compensa con la que está en la derecha

$$F = \int_0^h \rho g L y dy = \frac{1}{2} \rho g L h^2$$

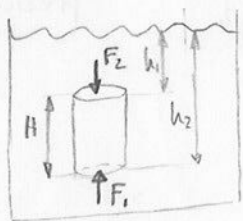
b)  $dM = (h-y)dF = (h-y)\rho g y L dy \rightarrow M = \rho g L \left( h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h \Rightarrow M = \frac{1}{6} \rho g L h^3$

c)  $M = F \cdot H$

$$H = \frac{M}{F} = \frac{\frac{1}{6} \rho g L h^3}{\frac{1}{2} \rho g L h^2} = \frac{1}{3} h$$

### → Flotación y principio de Arquímedes

El empuje aparece debido a que la presión no es constante en el interior del fluido. Dicho empuje es de sentido contrario al peso.



$$\left. \begin{aligned} F_1 &= p_1 A = (\rho_0 + \rho g h_1) A \\ F_2 &= p_2 A = (\rho_0 + \rho g h_2) A \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_2 &> F_1, \text{ porque } p_2 > p_1 \\ E &= F_2 - F_1 = \rho_f g (h_2 - h_1) A = \rho_f g H A \end{aligned}$$

densidad del fluido

Presión manométrica:  $p_M = p - p_0$

Ej. 1) Determinar la variación de la presión de la Tierra en función de la altura y sobre el nivel del mar, suponiendo que la gravedad es constante y que la densidad del aire es proporcional a la presión.

$$\ln p - \ln p_0 = - \frac{\rho_0}{p_0} g y \rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = - \frac{\rho_0}{p_0} g y \Rightarrow \underline{p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g y}}$$

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ \rho &= 1,29 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \right\} h? \quad p = \frac{p_0}{2} \Rightarrow y = h = 5550 \text{ m}$$

2) ¿Cuál es la relación de las alturas con la de las densidades?

# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

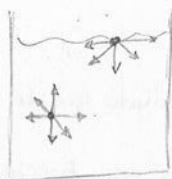
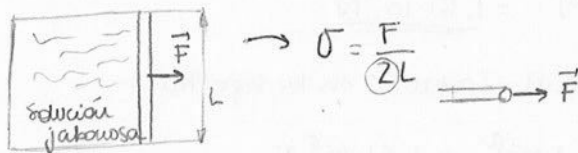


# T14 - MEDIOS DEFORMABLES (II)

## 1. Partículas Superficiales de los líquidos - Tensión superficial - Aplicaciones

La superficie de un líquido <sup>se comporta como</sup> es una membrana sometida a una tensión, que actúa paralela a la superficie y se define como la fuerza realizada por unidad de longitud, de forma que estas dos son perpendiculares.

$$\sigma = \frac{F}{L}$$



Fuerza de adhesión → Tiene un límite: la colisión entre las moléculas o (entre las moléculas del fluido) que aparezcan otras fuerzas, las de repulsión.

La superficie de una esfera es la mínima para un volumen determinado.

Para incrementar la superficie de un líquido, necesitamos aplicar una fuerza y, por tanto, hacemos un trabajo de forma que:

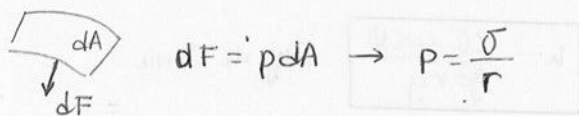
$$W = F \Delta x = \sigma L \Delta x = \sigma \Delta A \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = F/L \\ \sigma = W/A \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{SI: } [\sigma] = \text{N/m} \\ \text{SI: } [\sigma] = \text{J/m}^2 \end{array}$$

Esta energía se encuentra sobre la superficie del fluido, por lo que se le denomina energía.

### ~ Tensión en las superficies curvas

En todas las tensiones curvas de los fluidos, existen presiones dirigidas hacia el centro de curvatura de la superficie.

Si la superficie solo tiene un centro de curvatura, su valor será:  $dF = p dA$



sin embargo, si tiene más de un centro de curvatura:  $p = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$  Ec. de Laplace

Para el caso de una gota esférica, se puede simplificar:  $p = \frac{2\sigma}{r}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$W = \sigma 4\pi R^2 \quad \text{J} \quad W = \frac{8\sigma \pi R^2}{3} \quad \text{J} \quad \underline{L} \quad (\text{cuando se viene en una sola gota; si se separa, se produciría un momento})$$

2) El aceite de Oliva tiene una tensión superficial respecto del aire que vale  $32 \text{ mN/m}$ . Una gota esférica tiene un diámetro de  $4 \text{ mm}$ . Calcular:

a) Presión a la que está sometida

$$P = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{\frac{4}{2} \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{32 \text{ Pascales}}}$$

b) Fuerza total a la que <sup>está</sup> sometida debido a la tensión superficial que actúa sobre su superficie.

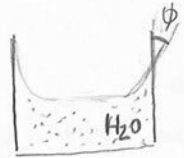
$$F = \rho A = 32 \cdot 4\pi (2 \cdot 10^{-3})^2 = \underline{\underline{1,61 \cdot 10^{-3} \text{ N}}}$$

c) Energía superficial (potencial en la superficie)

$$W = \sigma A = 32 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi (2 \cdot 10^{-3})^2 = \underline{\underline{1,61 \cdot 10^{-6} \text{ J}}}$$

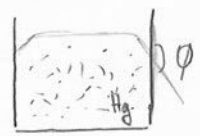
~ Capilaridad Capilaridad

La capilaridad es la capacidad que tiene un líquido de mojar o no al sólido que lo contiene.



El agua moja al cristal porque las moléculas del cristal ejercen una fuerza mayor que las del agua.

Sin embargo, el mercurio no moja el cristal porque las fuerzas de adhesión del sólido sobre el mercurio son menores.



$\phi$  → ángulo de contacto o de cohesión

- Si  $\phi < 90^\circ$  → El líquido moja al sólido
- Si  $\phi > 90^\circ$  → El líquido NO moja al sólido.

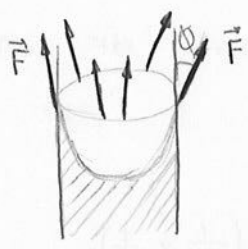
Caso particular:



El fluido sube por el tubo hasta una altura  $h$



Cuando no moja, el fluido desciende una altura  $h$



$$F = (\sigma L) \cos \phi$$

$$\sigma 2\pi r \cos \phi = mg = \rho \pi r^2 h g \rightarrow \boxed{h = \frac{2\sigma \cos \phi}{\rho g}} \text{ Ley de Jurin}$$

↓  
Solo tenemos en cuenta la componente vertical

$$h = \frac{2\sigma \cos \phi}{\rho g}$$

Ej. El tubo de un barómetro de  $\sigma = 517 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$  y ángulo de cohesión  $\phi = 12^\circ$  tiene un



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

## 2. Flujos fluidos. Ecuación de continuidad. Aplicaciones

Llamamos línea de flujo a la trayectoria descrita por una partícula del fluido. Cada partícula puede tener una velocidad distinta e incluso variable en el transcurso del tiempo. Entonces, podemos analizar el campo de velocidades del fluido en cada instante.

Definimos la línea de corriente como aquella en que en cada punto, el vector velocidad es tangente a la línea.

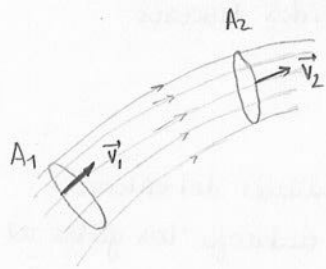
La línea de flujo y de corriente coinciden si no hay variación de la distribución de velocidades. Cuando esto sucede, se dice que el fluido está estacionario.

- Fluidos
- Ideal o de Bernoulli
  - Laminar, formado por láminas que se desplazan
  - Turbulento, apareciendo corrientes

### Características

- Compresible o incompresible → nos da información de si la densidad permanece constante (compresible) o si varía (incompresible).
- Viscosidad → representa el rozamiento interno entre las capas del fluido
- Flujo estacionario o no estacionario → se fija en un punto fijo del espacio, por el que están pasando varias moléculas en diferentes instantes determinados. Si las moléculas pasan a la misma velocidad
- Flujo rotacional o no rotacional → si se le puede asociar una velocidad angular a una porción de fluido es un flujo rotacional.

Los más sencillos son los flujos incompresibles, estacionarios, no viscosos e irrotacionales.



Para conocer el caudal que pasa por una superficie en un determinado tiempo se supone que es una porción de masa:

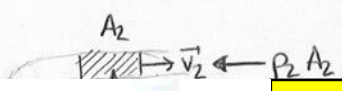
$$G = Q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l}{\Delta t} = \rho S v$$

$$\boxed{\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2} \rightarrow \text{Para un fluido compresible}$$

Ec. de continuidad

$$\text{Si } \rho_1 = \rho_2 \rightarrow \boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2} \rightarrow \text{Para un fluido incompresible}$$

## 3. Conservación de la energía en flujos fluidos. Teorema de Bernoulli. Aplics.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

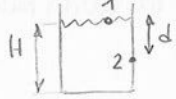
# Aplicaciones

•  $v=0$  o  $v=cte \rightarrow v_1=v_2 \Rightarrow P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \Rightarrow P_1 = P_2 + \rho g (h_2 - h_1)$

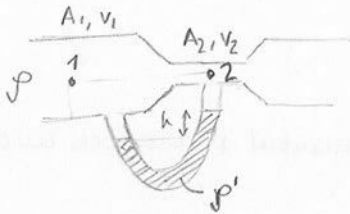
$P + \rho g h = cte \rightarrow$  Ec. Fund. de la Hidrostática

• Tubo horizontal  $\rightarrow h_1=h_2 \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = cte$  si  $p \downarrow, v \uparrow$

• Torricelli  $\rightarrow P_1 = P_2, v_1 = 0 \Rightarrow \rho g H = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g (H-d) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gd}$



## Venturi



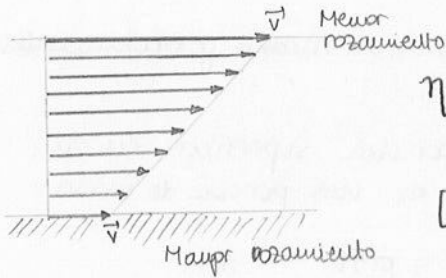
$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2$

$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$

$(p_1 - p_2) g h = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} \right) v_1^2$

$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2) g h}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}$

## 4. Fluidos viscosos



$\eta = \frac{F/A}{v/h}$

$F = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{h}$

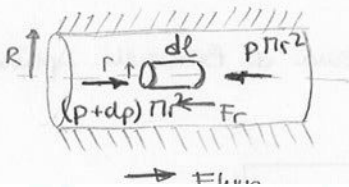
Ley de Newton para fluidos viscosos

$[\eta] = \frac{[Presión]}{T^{-1}} = [Presión] \cdot [Tiempo]$

S.I.:  $\eta \rightarrow Pa \cdot s$

$\eta \rightarrow$  es característico de cada fluido, pero depende de las condiciones del entorno

Al aumentar T, los líquidos fluyen mejor y disminuye  $\eta$ ; sin embargo, los gases al aumentar la T fluyen peor.



Régimen laminar  $\rightarrow$  capas cilíndricas de fluido

(En un instante t:  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ )

$(p+dp) \pi r^2 = p \pi r^2 + \underbrace{p 2 \pi r dl dv}_{Fr} \rightarrow r dp = 2 \eta dv$

# Cartagena99

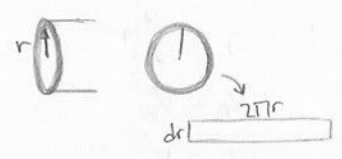
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• Gasto a través de una tubería

si  $v = ck \rightarrow Q = Sv$

si  $v \neq ck \rightarrow Q = \int v(r) ds = \int \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dl} (r^2 - R^2) 2\pi r dr = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dl} 2\pi \int (r^2 - R^2) dr$



$Q = \frac{\pi}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dl} \left[ \frac{R^4}{4} - \frac{R^2 R^2}{2} \right] = - \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dl} \Rightarrow Q = - \frac{\pi R^4}{8\eta}$

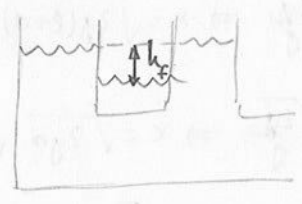
• Número de Reynolds

Sirve para pasar de un sistema laminar a uno que sea turbulento, cuando la velocidad aumenta mucho.

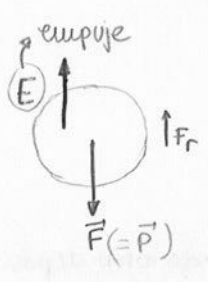
$R = \frac{2v\rho R}{\eta}$    
 $\left\{ \begin{array}{l} R < 2000 \rightarrow \text{LAMINAR} \\ R > 2000 \rightarrow \text{TURBULENTO} \end{array} \right.$

• Viscosidad en la ecuación de Bernoulli

$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = ck \rightarrow h_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1^2}{g} + \frac{P_1}{\rho g} = h_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2^2}{g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_f$



5. Movimiento de sólidos en el seno de fluidos. Fórmula de Stokes



$\vec{F}_k = -k\eta \vec{v}$  F. de Stokes

$[K] = \frac{[F]}{[\eta][v]} = \frac{[F][s]}{[F] L T^{-1}} = L \rightarrow K$  depende de la geometría del cuerpo que cae  
 ESFERA:  $K = 6\pi r$

$(F - E) - k\eta v = ma \rightarrow (F - E) - k\eta v_{\text{limite}} = 0$   
 $a = ck \rightarrow v \uparrow$   
 $a = 0 \rightarrow v = ck$



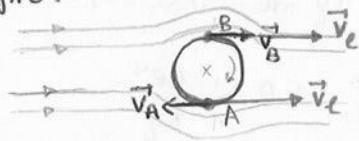
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Efecto MAGNUS

Tiene lugar cuando tenemos un cuerpo que gira en el seno de un fluido viscoso en movimiento y cuyas líneas de corrientes son perpendiculares al eje de giro. Entonces, va a aparecer una fuerza que es perpendicular a las líneas de corriente y al eje de giro.



$$h_A \sim h_B$$

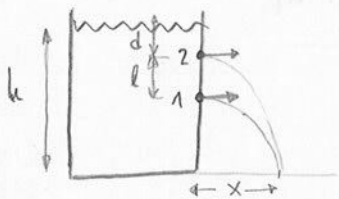
$$\text{Bernoulli: } P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$v_A < v_B$$

$$P_A > P_B$$

$\vec{v}_c$ : velocidad de la línea de corriente

Eq. 1) Un recipiente abierto de paredes verticales está completamente lleno hasta una altura  $h$ . En la misma pared vertical hay dos orificios que distan entre sí una distancia  $l$  por los que sale agua. Calcular la distancia  $d$  del orificio superior a la superficie libre del agua sabiendo que los dos chorros se cortan en el mismo punto del plano horizontal que pasa por el fondo del recipiente.



$$\begin{aligned} 1: v_1 &= \sqrt{2g(l+d)} & \begin{cases} x = v_1 t_1 \\ y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}} \Rightarrow x = \sqrt{2g(l+d)} \sqrt{\frac{2y_1}{g}} \end{cases} \\ 2: v_2 &= \sqrt{2gd} & \begin{cases} x = v_2 t_2 \\ y_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2y_2}{g}} \Rightarrow x = \sqrt{2gd} \sqrt{\frac{2y_2}{g}} \end{cases} \end{aligned}$$

(Torricelli + Tiro parabólico)

$$x_1 = x_2 \equiv x \rightarrow \sqrt{2g(l+d)} \cdot \sqrt{\frac{2y_1}{g}} = \sqrt{2gd} \cdot \sqrt{\frac{2y_2}{g}} \Rightarrow \underline{\underline{d = \frac{h-l}{2}}}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= h-d-l \\ y_2 &= h-d \end{aligned}$$

2) De un depósito muy grande A sale agua continuamente a través de otro depósito menor B y un orificio C. El nivel de agua en A se supone constante a una altura  $H$ , siendo  $h$  la altura de orificio C. Son también datos las secciones de B y C. Calcular la velocidad del agua y la presión en el depósito B, y el caudal.

$$P_A = P_C \rightarrow \text{puntos en la superficie; } v_A = 0$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

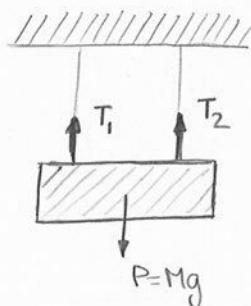
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$v = \sum v_c$$

Cartagena99

3) Se cuelga una viga de 2000 kg de dos cables de la misma longitud  $L$ , uno de aluminio y otro de acero. Al suspender la viga, ambos cables se estiran lo mismo. Calcular la tensión que soporta cada cable sabiendo que los módulos de Young son:  $E_1 = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  (aluminio) y  $E_2 = 20 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  (acero).

$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$



$$T_1 + T_2 = Mg$$

$$E_1 = \frac{T_1}{\Delta L_1/L_1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{T_1}{E_1} = \frac{T_2}{E_2}$$

$$E_2 = \frac{T_2}{\Delta L_2/L_2}$$

4) Se tiene una barra cilíndrica de aluminio de 1 m que se somete a una tracción longitudinal. Calcular el periodo de las oscilaciones elásticas que experimentará al cesar la tracción, conociendo la densidad y el módulo de Young del aluminio.

$$\rho_{Al} = 2,7 \text{ g/cm}^3$$

$$E_{Al} = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L} \rightarrow F = \underbrace{EA}_{\text{por ser vector}} \frac{\Delta L}{L} = -k \Delta L \Rightarrow k = \frac{EA}{L}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = \omega^2 m = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{densidad}} \cdot AL$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \rho AL^2}{EA}}$$

# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a yellow-bordered box.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Tensión superficial  $\rightarrow \sigma = \frac{F}{L} = \frac{W}{A}$  (  $W = F \Delta x = \sigma L \Delta x = \sigma \Delta A$  )  
 LÍQUIDO (  $F = pA$  )

Tensión en superficies curvas  $\rightarrow$  1 centro de curvatura :  $p = \frac{\sigma}{r}$   
 2 centros de curvatura :  $p = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$  Ec. de Laplace  
 Gotas esféricas :  $p = \frac{2\sigma}{r}$

Capilaridad  $\rightarrow$  capacidad que tiene un líquido para mojar o no al sólido que lo contiene  
 $\left\{ \begin{array}{l} \phi < 90^\circ : \text{moja} \\ \phi > 90^\circ : \text{no moja} \end{array} \right.$

Error en las medidas de  $\sigma$  :  $h = \frac{2\sigma \cos \phi}{\rho r g}$  Ley de Jurin

• Flujos Fluidos

Fluido  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ideal (Bernoulli)} \\ \text{Laminar} \\ \text{Turbulento} \end{array} \right.$

Flujo  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Compresible / incompresible (densidad)} \\ \text{Viscoso (rozamiento)} \\ \text{Estacionario / no estacionario (velocidad)} \\ \text{Rotacional / no rotacional (v. angular)} \end{array} \right.$

Ecuación de continuidad  $\rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$

Ecuación de BERNOULLI  $\rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = cte$

•  $v=0 / v=cte \rightarrow p + \rho g h = cte \Rightarrow$  Ec. Fundamental de la Hidrostática

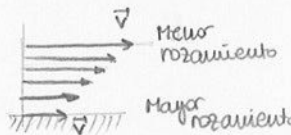
•  $h_1 = h_2 \rightarrow p + \frac{1}{2} \rho v^2 = cte \Rightarrow p \downarrow, v \uparrow / p \uparrow, v \downarrow$

• TORRICELLI  $\rightarrow p_1 = p_2 = p_{atm}$   
 $v_1 = 0 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gd}$

• VENTURI  $\rightarrow h_1 = h_2$   
 $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2) g h}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}$

• Fluidos viscosos

Ley de NEWTON  $\rightarrow F = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{h}$



Ecuación de POISEUILLE  $\rightarrow v = v(r) = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dl} (r^2 - R^2)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• Sólidos en fluidos  $\vec{F}_r = -k\eta\vec{v}$  Fórmula de STOKES

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue triangle pointing downwards and an orange triangle pointing upwards, both overlapping the text.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## EVALUACIÓN CONTINUA FGI (Temas 1-3)

1.- Comprobar la dimensión de los términos de la ecuación de Bernoulli de la Hidrodinámica:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = cte$$

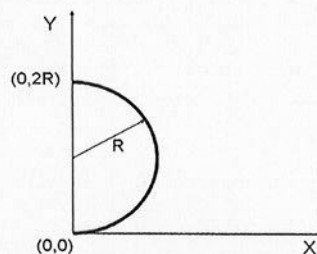
donde  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad,  $v$  la velocidad,  $z$  la altura, correspondientes a un punto del fluido y  $g$  el valor de la gravedad en ese punto.

2.- Para determinar el valor de una variable independiente,  $y$  se utiliza la función  $y = x_1^3 x_2^2$ . Si se miden directamente la pareja de valores  $x_1$  y  $x_2$ , y se obtiene para cada uno de dichos valores unas incertidumbres relativas de  $w_{x_1} = 1 \times 10^{-4}$  y  $w_{x_2} = 2 \times 10^{-4}$ . Determinar la incertidumbre relativa,  $w_y$ , del probable valor de  $y$ . (Feb - 2010)

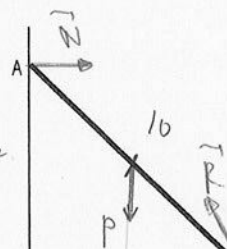
3.- Dado un sistema de vectores deslizantes:  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  y  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ , cuyas rectas soportes pasan respectivamente por los puntos: A(2, 1, -2), B(-1, 2, 2) y C(-2, 2, 1). Determinar:

- Resultante del sistema
- Momento resultante del sistema respecto al origen de coordenadas
- Momento mínimo
- Ecuación del eje central

4.- Aplicando el teorema de Guldin, determinar el centro de masas de un alambre que tiene la forma de media circunferencia de radio  $R$  y cuyos extremos ocupan la posición (0,0) y (0,2R).



5.- Una escalera de 10 m de longitud y 600 N de peso, con su centro de gravedad en el punto medio, se encuentra en equilibrio, con un extremo en el punto A, a 8 m sobre el suelo, apoyado en una pared vertical sin rozamiento, y el otro extremo en B, sobre el suelo áspero. Dibujar las fuerzas que actúan sobre la escalera y plantear las ecuaciones del



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

EVALUACIÓN CONTINUA  
(Tarea 1-2)

1.- Conocer la definición de los límites de la función de la variable

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$$

2.- Para determinar el valor de una función pedimos y se llama la función

3.- Todo un sistema de vectores de un espacio vectorial  $V$  se llama un sistema de vectores de un espacio vectorial  $V$  si y solo si los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de dicho sistema son linealmente independientes de  $V$ .

4.- El momento de un sistema de fuerzas respecto a un punto  $O$  se define como el vector

5.- El momento de un sistema de fuerzas respecto a un punto  $O$  se define como el vector

6.- El momento de un sistema de fuerzas respecto a un punto  $O$  se define como el vector

7.- El momento de un sistema de fuerzas respecto a un punto  $O$  se define como el vector



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

EVALUACIÓN CONTINUA FGI (T3)  
(Temas 4-8)

1.- El vector de posición de un móvil en una referencia cartesiana ortonormal viene dado por la expresión:  $\vec{r} = (t^2 + 1)\vec{i} + \frac{1}{2}t^2\vec{j} + (t^2 - 1)\vec{k}$  (m), viniendo el tiempo expresado en segundos. Obtener las componentes intrínsecas de la aceleración e indicar el tipo de movimiento y la trayectoria que sigue.

2.- En un instante dado, los puntos A, B y C de un sistema indeformable, y cuyas coordenadas están dadas en centímetros, son A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1), tienen velocidades respectivas:  $\mathbf{v}_A$  (0,3,-2),  $\mathbf{v}_B$  (-3,0,1) y  $\mathbf{v}_C$  (2,-1,0), medidas en m/s con relación a la misma referencia. Determinar el eje instantáneo de rotación y mínima translación sabiendo que el origen de coordenadas pertenece al mismo.

3.- Una plataforma circular de radio  $R$  gira alrededor de su eje geométrico con velocidad angular constante  $\omega$ , respecto a la referencia S. Un punto móvil que parte del eje se desplaza radialmente por la plataforma con velocidad constante igual a  $v$  respecto de la misma. Determine el valor modular de la aceleración del punto móvil respecto de S cuando dicho punto alcanza el borde de la plataforma.

4.- En los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento se colocan dos cuerpos de masas  $M_1$  y  $M_2$  ( $M_1 > M_2$ ).

- Dibujar el diagrama de fuerzas para cada masa
- Calcular la aceleración del sistema dejado en libertad
- Hallar la tensión que soporta la cuerda

5.- En una región del espacio existe un campo de fuerzas conservativo,  $\mathbf{F}$ , cuya función potencial expresada en coordenadas cartesianas dadas en el SI es:  
 $U(x, y, z) = -x(3y + z^2) - yz$  (J).

- Obtener la expresión vectorial de la fuerza,  $\mathbf{F}$ , dada en unidades del Sistema Internacional, considerándola orientada en el sentido de los potenciales decrecientes.
- El trabajo realizado por la fuerza al desplazar un móvil entre los puntos (1,0,0) y (0,1,0)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1- El vector de posición de un móvil en una referencia espacial cartesiana tiene como función del tiempo  $r = (t^2 + 2t - 1)\mathbf{i} + (t^3 - 3t^2 + 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$ . Calcule la velocidad y la aceleración en  $t = 2$  s.

2- En un instante dado, los vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  de un sistema tridimensional y cuyos componentes están dados en coordenadas cartesianas por  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  y  $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ . Calcule el producto escalar de  $\mathbf{A}$  con  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , el producto vectorial de  $\mathbf{A}$  con  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , y el ángulo que forman  $\mathbf{A}$  con  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ .

3- Un punto se mueve en una trayectoria circular de radio  $R$  que describe de su centro con velocidad angular constante  $\omega$ . Calcule la velocidad y la aceleración en un instante dado  $t$  en función de  $R$  y  $\omega$ . Calcule también el ángulo que forman la velocidad y la aceleración en un instante dado  $t$ .

4- En un instante dado, un móvil se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = v_0(\mathbf{i} + \mathbf{j})$  y aceleración  $\mathbf{a} = a_0(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ . Calcule el ángulo que forman la velocidad y la aceleración en un instante dado  $t$ .

5- Encuentre el potencial escalar en un campo de fuerzas conservativas  $\mathbf{F} = -k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$  en un punto  $(x, y, z)$  en un sistema de coordenadas cartesianas, donde  $k$  es una constante.

6- Obtenga la expresión vectorial de la fuerza  $\mathbf{F}$  de un sistema de fuerzas conservativas en un sistema de coordenadas cartesianas, donde  $V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$  es el potencial escalar.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

